И. И. АЛЕКСАНДРОВ

СБОРНИК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

УЧПЕДГИЗ • 1950

И. И. АЛЕКСАНДРОВ

СБОРНИК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ
С РЕШЕНИЯМИ

*Утвержден Министерством просвещения РСФСР
в качестве пособия для учителей
средней школы*

ИЗДАНИЕ ВОСЕМНАДЦАТОЕ

Под редакцией Н. В. НАУМОВИЧ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА * 1950

Книга И. И. Александрова „Сборник геометрических задач на построение" является классическим трудом, завоевавшим глубокую признательность широких математических кругов всего мира.

Книга может служить хорошим пособием для учителей средней школы, а также и для учащихся старших классов средней школы.

ПРЕДИСЛОВИЕ К 18-му ИЗДАНИЮ.

Книга Ивана Ивановича Александрова „Сборник геометрических задач на построение“ имеет всеобщую известность.

В 1936 г. Учпедгиз переиздал 17-м изданием этот классический труд. Но надо отметить, что 17-е издание, подвергшись переработке С. Ю. Калецкого, выразившейся в решениях многих задач и в дополнениях к указаниям автора, потеряло ту значимость, которую этот труд имел до переработки. Редакция математики восстановила книгу в том виде, в каком она издавалась в последний раз при жизни автора. Учитывая пожелания учителей, редакция математики сочла возможным дать в приложении дополнительные указания к решениям некоторых задач. Эти указания составлены кандидатом физико-математических наук Е. Н. Наумович.

Редакция математики.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К 16-му ИЗДАНИЮ.

При изменении своей книги автору предстояли две задачи неодинаковой трудности: или довести книгу до полного научного совершенства по современным источникам, удалив ее таким образом от средней школы, или, сделав возможные улучшения в научном смысле, не удалять книги от области среднего образования.

Дело еще осложнялось тем, что, по отзывам нескольких компетентных лиц, книга в России и за границей с успехом служила для самостоятельных занятий учащихся — без руководства преподавателей. При этом одни учащиеся находили книгу слишком трудной, другие — недостаточной и неохватывающей весь предмет.

Автор в течение многих лет видел очень много случаев чрезвычайно полезного влияния построений на ум учащегося и потому ни секунды не колебался в выборе и избрал второй путь, стараясь не удалять книги от средней школы и не жертвуя совсем развитием ее научности.

С такими намерениями автор в первой трети своей книги сохранил ее несколько ученический язык [1]), оставил в ней задачи с двойным номером на случай повторения пройденного в классе, — эти двойные номера ручаются за сходство идеи и содержания решения — оставил также задачи, разнящиеся только формой выражения [2]) с целью дать учащемуся время освоиться с этим явлением. Задач последнего типа, начиная с № 150, II, уже совсем не встречается. Краткие обозначения и специальные термины введены окончательно только во второй половине книги. От самого начала автор строго различает термины „прямая" и „отрезок прямой", „касательные окружности" и „касательные круги" и т. п. [3]).

---

[1]) Здесь во многих случаях я смотрел на задачу с точки зрения ученика, недостаточно опытного в построении.

[2]) Таковы, напр., две задачи: „построить треугольник, зная B, a, c", и „построить треугольник, зная B и радиусы окружностей, описаниых около треугольников ABD и DBC, где $BD = h_b$".

[3]) Этим исполнено желание покойного К. В. Фохта („Ж. Мин. Нар. Просв.", 1911, август, стр. 200). Вопреки моим собственным словам (возражение на рецензию К. В. Фохта, „Ж. Мин. Нар. Просв.", 1912, февраль, стр. 251, конец пункта 2-го), это оказалось вполне возможным, как и предсказывал мне покойный В. Б. Струве.

Искусство решать задачи на построение слагается главным образом из уменья читать чертежи, из находчивости в проведении вспомогательной линии (см., напр., 2, 8, 156[1]), II) и, наконец, равным образом, из знания и уменья применять методы. С углублением в дело должна развиваться находчивость уже высшего порядка — она состоит в уменье свести одну задачу на другую и, главным образом, в уменье применить к делу *идеи* метода.

Всего лучше это покажут задачи: 112, 156, 160, IV и 339, 386, 502, 503, 505, II.

Соответственно этому пополнены задачи на чтение чертежей (9—50, II) не в смысле числа задач, а в смысле разнообразия геометрических идей решения. Это достигнуто исключением задач одной идеи с заменой их задачами других идей. В дальнейшем было принято не брать более двух вариантов одной задачи, за исключением оригинальных и трудных случаев — таковы применение задач 69, I и 7, IV, задачи на инверсию и т. п. Общее число задач в книге приблизительно осталось то же, хотя прибавлено более ста новых задач (на половину собственной композиции, не считая первого отдела). Таким образом книга, не отдаляясь от области средней школы, стала более содержательной и более свободной от балласта.

Метод инверсии изложен заново с достаточным числом примеров, и ему дано надлежащее место. Из книги исключены все стереометрические задачи, за исключением тех, которые решаются планиметрическими методами (130, 133, IV). Прибавлены специальные указания к построению параллелограмов (386, II).

В отделе третьем я остановился на мысли помещать лишь те задачи, которые решаются с помощью алгебры или легче, или с тою же трудностью (в некоторых случаях это сделано по способу Лемуана). Поэтому число задач сократилось. Но зато я поместил новую статью о возможности решения задачи циркулем и линейкой, разбирая этот вопрос с двух точек зрения. Кроме примеров, написанных по этому вопросу с подробным решением, приложено 20 задач для упражнения.

В отделе первом, согласно указанию многих лиц, я сократил число задач на непосредственное применение основных задач, но зато поместил до 50 теорем, впоследствии играющих важную роль. Переделка этих маленьких упражнений может оказать существенную помощь в дальнейших построениях (см. 83, I и 154, IV, 82, I и 435, II). Число этих теорем можно увеличивать произвольно — я остановился на главнейших.

Четвертый отдел отличается тем, что учащийся должен сам разыскать подходящий метод решения. В него же вошли задачи наиболее трудные и предназначенные для лиц, имеющих особую склонность к этому предмету. Число ключей к решению и намеков на решение

---

[1]) Решение это, между прочим, напечатано в первом издании моей книги, 1881 г., № 145, IV.

я всюду значительно увеличил, полагая, что те лица, которым они не нужны, могут не обращать на них внимания.

За страшно быстрым темпом современной жизни я не успел поместить элементарную теорию поляр[1]) и гармонических фигур; в будущем я надеюсь их изложить совершенно просто. Эти теории решают весьма изящно некоторые задачи (156—160, IV).

Книга была отдана решениям с помощью циркуля и линейки. В настоящее время такую постановку дела уже нельзя признать правильной. Поэтому, в особом пятом отделе, изложены построения Маскерони, Штейнера, а также решения задач с помощью простейших инструментов, способных решить не только квадратную задачу, но и задачу третьей и четвертой степени. Сюда же вошло мое маленькое исследование о конструктивных задачах с неприступными точками.

Согласно опыту последние два отдела книги практиковались в школе мало; поэтому эти отделы напечатаны особо и составляют 2-ю часть всего труда.

Как и в прежних изданиях я указываю, как надо пользоваться моей книгой в школе. Прежде всего надо пройти основные построения (I, 1—17) и достаточное количество задач, приучающих глаз и руку к построениям, не требующим анализа (18—36, I и 73—93, II). Параллельно с этими задачами или раньше полезно пройти соответствующие вопросы первого отдела. Далее необходимо обратить достаточное внимание на чтение чертежей, как на одну из самых важных сторон всего дела (№№ 1—52, II). При дальнейшем постепенном и осторожном возвышении трудности задач следует кроме методов решения познакомить с очень важными приемами решения α, β, $\gamma\ldots$, ν (стр. 84, 103 и 104); венцом этого дела является указание на то, что некоторые геометрические идеи, как выразился один из моих рецензентов, оказываются рычагами решения целого класса задач. Число пройденных задач, число изученных методов и идей наперед указаны быть не могут; все это определяется в каждом частном случае интересом учащихся и тактом преподавателя.

При перерабатывании моей книги, кроме периодических изданий и собственной работы, я пользовался трудами Петерсена, Адлера, Вебера, Enriques'a, Rouché et Cõmberousse и задачником Е. М. Пржевальского.

Заключительное мое слово[2]) позволяю себе направить к учащимся.

---

[1]) По поводу издания моей книги в Америке, меня уведомляли, что в американских школах сильно привилось учение о полярах и применение этого учения к задачам на построение.

[2]) „Скажем вместе с Дюгамелем, что никогда не следует скрывать ни от самих себя, ни, тем более, от учащихся те трудности, которые приходится нам самим преодолевать при решении геометрических задач, что часто их решение находится помощью произвольных попыток, которые хотя и могут быть известным образом направляемы, но, однако, иногда довольно долго бывают безуспешны для умов наиболее проницательных. Даже в этой наиболее развитой отрасли человеческого знания весьма за-

Неудача в решении задач наиболее часто выпадает на долю конструктивных задач. Такая неудача не должна подавать повода к понижению энергии. С пишущим эти строки неоднократно бывало, что иная задача несколько лет не поддавалась решению, в конце же всего решалась обыкновенно довольно быстро. Вообще же, если задача, разрешимая по существу дела, не поддается решению, то это чаще всего зависит от того, что мы недостаточно терпеливо и послушно идем туда, куда нам указывают логика и идеи метода.

И. Александров.

Прим. Для желающих скорее ознакомиться с сущностью предлагаемой книги выписываем номера задач, служащих представителями различных методов.

Метод геометрических мест: 117, 157, 173, 67, 210, II и 62, 105, IV.

Радикальные оси: 240—260, II.

Метод подобия и умножения фигур: 268, 295, 307, 270, 271, 318, II и 114, 130, IV.

Метод симметрии и спрямления: 340, 346, 376, 355, II и 136, 118, IV.

Метод параллельного перенесения: 380, 386, 404, 409, II и 156, IV.

Метод вращения около оси: 438—451, II.

Метод вращения около точки: 455—500, II и 154, IV.

Метод инверсии: 501—505, II и 160, IV.

На задачах подобного рода сосредоточивается научный интерес всей книги.

ОБОЗНАЧЕНИЯ.

В треугольнике ABC обозначены:

сторона BC через a,	*периметр* через $2p$,
угол BAC „ A,	*площадь* „ S,
высота AD „ h_a,	*радиусы* вписанной и описанной окружности через r и R,

медиана, т. е. отрезок, соединяющий A с серединой BC — m_a,
биссектор AE, т. е. отрезок от A до BC, делящий угол A пополам — b_A,
радиус внешней вписанной окружности, касающейся a и продолжения сторон b и c, — ρ_a.

Длина данного отрезка часто обозначена одной буквой a или k.

В четырехугольнике $ABCD$ угол DAB обозначен через A.

Угол между прямыми AB и CD, или x и y, обозначен знаком $\angle (AB, CD)$ или $\angle (x, y)$.

Площадь квадрата, сторона которого равна k, обозначена через k^2.

метна недостаточность наших средств к исследованию и их некоторая случайность. Вот почему скрывать друг от друга собственные затруднения — значит забыть взаимную друг другу помощь и отказаться служить развитию наших знаний сообразно нашим силам" (из предисловия к первому изданию 1881 года).

Окружность с центром O, проходящая через точку A, обозначена окружностью (O, A); окружность с центром O и радиусом, равным отрезку AB, обозначена окружностью (O, AB).

Пересечение высот треугольника называется ортоцентром.

При ссылках на предшествовавшие задачи поставлены скобки, в которых номер задачи обозначен арабской цифрой, а отдел задачника римской цифрой. Таким образом, знак (14, II) указывает на 14-ю задачу второго отдела, а знак (156, IV) — на 156-ю задачу четвертого отдела. Для сокращения слов принято:

г. м. = геометрическое место (стр. 38),
м. г. м. = метод геометрических мест,
м. п. = метод подобия,
м. с. = метод симметрии или спрямления,
м. о. = метод обратности,
м. пр. = метод перенесения,
м. в. = метод вращения,
м. и. = метод инверсии,
п. а. = приложение алгебры к геометрии.

Греческие буквы α, β, γ, δ, ε и λ, μ, ν указывают приемы решений; эти приемы помещены на стр. 84, 103 и 104.

Знаки (т. A) или (U) обозначают ссылки на теоремы A, B, C, ... U, W (стр. 121—123, 146—151).

В отделе пятом знак (XII) или (II) указывает на применение 12-й или 2-й задачи этого отдела.



ИВАН ИВАНОВИЧ АЛЕКСАНДРОВ

Иван Иванович Александров родился 25 декабря 1856 г. в г. Владимире, в семье уездного врача. В 1861 г. его отец Иван Павлович Александров был назначен врачом в г. Тулу, куда и прибыл со своей семьей. По окончании Тульской гимназии Иван Иванович поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В университете он слушал лекции П. Л. Чебышева, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева, Д. К. Савина и Д. И. Менделеева. Особенно сильное влияние на формирование молодого ученого оказал Пафнутий Львович Чебышев. На своих слушателей П. Л. Чебышев оказывал влияние не только как гениальный ученый-математик, но и как педагог-методист. Он сыграл большую роль в постановке преподавания математики в средней школе (гимназии) и в приходских училищах. В делах Ученого комитета Министерства просвещения сохранилось свыше двухсот отзывов Чебышева на учебные руководства и пособия, на программы школ и т. д.

По окончании университета в 1878 г. И. И. Александров был назначен учителем математики в Тамбовскую гимназию, где и рабо-

тал до 1906 г. В 1906 г. он переехал на работу в Москву. Наряду с работой в гимназии И. И. читал лекции в Народном университете имени Шанявского и на вечерних курсах Межевого института.

Характерной чертой И. И. Александрова была широта его интересов, широта его научной и педагогической деятельности. Получив в университете разностороннее образование и имея всегда перед собой образы русских ученых — своих учителей: Чебышева, Коркина и Менделеева, И. И. посвятил себя делу народного просвещения и со страстью стремился передать свои знания молодому поколению. Но преподавательская деятельность не могла вполне удовлетворить И. И., и он, начиная с 1881 г., выступает как педагог-писатель. Кроме непосредственно педагогической и авторской работы, И. И. принимает активное участие в общественной жизни г. Тамбова: читает публичные лекции не только по математике, но и по вопросам естествознания и музыкального искусства.

Всеобщую известность принесли И. И. Александрову его талантливые труды по вопросам содержания и преподавания школьного курса математики. Ему принадлежит свыше 30 печатных работ.

Приводим перечень его основных трудов.

1. „Методы решений геометрических задач на построение".
2. „Методы решений арифметических задач".
3. „Основания арифметики".
4. „Приложение геометрических построений к тригонометрии".
5. „Геометрические методы разыскания максимума и минимума".
6. „Первые XIX предложений „Эвклида".
7. „Конструктивные задачи с неприступными точками".
8. „Наглядное преподавание геометрии".
9. „Памяти Н. И. Лобачевского".
10. „Приборы для публичных лекций по космографии".
11. „О давлении света".
12. „О составлении и решении задач на вращение".
13. „К решению неопределенных уравнений 1-й степени".
14. „О причинах развития математики".

Остановимся вкратце на значении двух его главных работ.

Первой работой, сразу доставившей И. И. всеобщую известность, явилась его книга „Методы решений геометрических задач на построение", опубликованная в 1881 г. До этого как в России, так и в других странах геометрические задачи на построение решались без системы, без общих методов, вследствие чего культура решения этих задач стояла на весьма невысоком уровне. И. И. в своей

книге расположил геометрические задачи на построение не по степени трудности их решения (что вызывало расположение задач по случайным признакам), а в зависимости от главных методов решений. Он указал способы исследования всей неисчерпаемой области задач на построение; при этом некоторые геометрические идеи оказываются рычагами решения целого класса задач.

После опубликования этого труда вопрос решения геометрических задач на построение сделался необходимой частью учебного материала по геометрии. О значении этого труда говорит и тот факт, что вскоре после опубликования его в России он был издан во Франции и в Германии.

Вторая крупная работа И. И. Александрова — „Методы решения арифметических задач" (1-е издание вышло в 1887 г.). Главную мысль этой работы И. И. выразил словами, „что нелепо делить арифметические задачи по рубрикам смешения, процентов и т. п., что в основание надо положить не предметы, о которых говорит задача, а те идеи, которые направляют решение, что тип задачи зависит лишь от математической зависимости, которые определяют тот или другой способ решения" (И. И. Александров, Методы решения арифметических задач, 1915, стр. 5). Эта ведущая мысль встретила возражения некоторых методистов. Тогда в дополнение и в развитие своих идей И. И. написал две брошюры: „Классификация арифметических задач в современных задачниках" и „Современные требования от арифметических задачников".

Книга „Методы решения арифметических задач" оказала большое влияние на методику преподавания арифметики. Все остальные работы И. И. также отличаются научностью, оригинальностью обобщений, ясностью языка и стремлением улучшить методику преподавания математики.

Как педагог И. И. Александров пользовался большим уважением учителей и любовью учащихся. Где бы он ни преподавал, отзывы учащихся о нем как об учителе и воспитателе всегда были самые восторженные.

И. И. Александров в письмах к своему сыну А. И. писал: „Преподаватель должен не только безукоризненно знать свой предмет и ясно и логично преподносить его ученикам, но и духовно воздействовать на них. Без духовного воздействия на учеников он или чиновник, или ремесленник плохого разряда... И про меня неверно, что я преподаватель по призванию ... полюби дело и учеников, и все прекрасно будет. Я только взял верное направление в этом деле".

И. И. Александров занимался не только вопросами математики и ее преподавания. Его публичные лекции по вопросам естествознания всегда привлекали широкий круг слушателей. Он принимал участие в методических совещаниях и был участником съездов математиков, где выступал с докладами. Вся его кипучая деятельность была подчинена одной мысли — дать родине все то, что он знает. Даже трагический случай, подорвавший здоровье И. И. (осенью 1918 г. он попал под трамвай, и ему пришлось ампутировать ногу), не приостановил его работу. Он долгое время был на излечении в больнице, но и там, находясь в тяжелом положении, работал над улучшением своих книг. Умер И. И. Александров 19 декабря 1919 г.

С. Пономарев.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

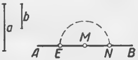
ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ НЕПОСРЕДСТВЕННО.

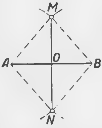
1. Отложить на данной прямой отрезок данной длины CD.

2. Начертить отрезок, равный сумме или разности двух данных отрезков a и b (черт. 1).

Реш. На произвольной прямой AB надо отложить от точки A в одну сторону отрезок $AM = a$; если затем отложить отрезок $MN = b$ в ту же сторону от M, то $AN = a + b$; если же отложить $ME = b$ в противоположную сторону, то $AE = a - b$. Если из центра M описать полуокружность радиусом, равным b, то на чертеже получится вместе и сумма и разность отрезков a и b.



Черт. 1.



Черт. 2.

3. Начертить отрезок, равный алгебраической сумме отрезков $a + b - c + d - e$.

4. Данный отрезок AB разделить пополам.

Реш. Из концов A и B, как из центров, радиусом, бо́льшим половины AB (черт. 2), опишем две окружности, которые пересекутся в точках M и N; соединив M и N, в пересечении AB и MN найдем искомую точку O. Фигура $AMBN$ есть ромб, и потому $AO = OB$.

5. Разделить отрезок AB на 4, 8, 16 ... 2^n равных частей.

Реш. Разделив AB пополам, каждую половину делим пополам, каждую четверть опять пополам и т. д. См. также 16, I.

6. К отрезку AB восставить перпендикуляр в его середине (4, I).

7*. [1]) К отрезку AB восставить перпендикуляр в данной его точке M.

---

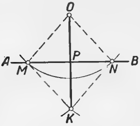
[1]) На все задачи, отмеченные звёздочкой, в конце книги даны решения или указания. *(Ред.)*

Реш. I. Отложим от точки M на прямой AB отрезок $MC = AM$ так, чтобы точка M приходилась между точками A и C. Погом восставим перпендикуляр к AC в его середине (6, I).

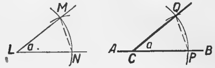
II. Взяв на AB произвольную точку D, из центров M и D опишем дуги равными произвольными радиусами до встречи их в точке E; на продолжении DE отложим $EF = DE$. Прямая FM будет искомая.

8*. Из внешней точки O опустить перпендикуляр на прямую AB.

Реш. I. Из центра O (черт. 3) опишем произвольным радиусом дугу, пересекающую AB в точках M и N; из центров M и N описываем дуги тем же радиусом. Искомый перпендикуляр есть OK, потому что фигура $OMKN$ есть ромб.



Черт. 3.



Черт. 4.

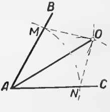
II. Из центра O опишем дугу радиусом, который вдвое больше какого-нибудь произвольного отрезка. Дуга встретит AB в M. На отрезке OM опишем полуокружность, она встретит AB в искомой точке.

9. При точке C на прямой AB построить угол, равный данному углу a.

Реш. Произвольным радиусом из вершины угла a (черт. 4) очертим дугу, пересекающую его стороны в M и N; тем же радиусом очертим из центра C дугу, пересекающую AB в точке P. Из центра P радиусом, равным MN, очертим дугу, пересекающую прежнюю дугу в точке Q. Соединим точки Q и C. $\triangle\triangle\, LMN$ и CQP имеют три равные стороны и потому они равны; след., $\angle QCP = \angle MLN = a$.

10. Построить угол, равный сумме нескольких углов a, b, c...

Реш. На произвольной прямой AB построим $\angle CAB = a$ (9, I); на стороне AC угла CAB построим $\angle MAC = b$ так, чтобы сторона MA лежала вне $\angle CAB$; тогда $MAB = \angle a + \angle b$; так же надо поступать дальше.



Черт. 5.

11. Построить угол, равный разности двух углов a и b.

Реш. То же, что в задаче 10, но сторона MA должна пойти внутри $\angle BAC$.

12. Данный $\angle BAC$ разделить пополам.

Реш. Произвольным радиусом из вершины данного угла (черт. 5) опишем дугу, пересекающую его стороны в точках M и N; из центров M и N опишем

дуги равными радиусами, бо́льшими половины MN; AO делит $\angle BAC$ пополам (видно из равенства $\triangle AOM$ и $\triangle AON$).

13. Разделить данный угол на 4, 8, 16... равных частей (5, I).

14*. Через данную точку O провести прямую, параллельную данной прямой MN.

Реш. I. Из центра O опишем окружность, встречающую MN в точке A, и на MN отложим $AB = AO$; затем из центра B тем же радиусом опишем дугу, встречающую окружность в точке C. Так как фигура $AOCB$ есть ромб, то $OC \parallel MN$.

II. Произвольную точку P прямой MN соединим с O и продолжим PO до Q так, чтобы $PO = OQ$. Из центра Q опишем дугу радиусом QP до встречи с MN в точке P_1; отложим на QP_1 часть $QO_1 = QO$. Прямая OO_1 будет искомая.

15. Провести прямую на расстоянии, равном a, от данной прямой AB.

Реш. В произвольной точке M прямой AB восставим перпендикуляр и продолжим его в обе стороны от точки M; затем отложим на нем отрезки MN и ML, равные a. Через точки N и L проведем прямые, перпендикулярные к прямой NL; они будут искомые.

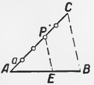
16. Разделить отрезок AB на $n = 5$ равных частей.

Реш. I. Начертив произвольно AC, отложим на ней от точки A пять равных и произвольных частей; пусть C будет конец последней части. Соединив C и B, из точек деления прямой AC проведем прямые, параллельные CB; эти прямые разделят AB на пять равных частей.

II. Выбрав произвольный радиус a, из центра A опишем две дуги радиусами a и $5a$; затем из B проведем произвольную прямую, встречающую бо́льшую дугу в точках C и D. Пусть AC и AD встретят меньшую дугу в E и F, а EF встретит AB в G. Тогда $AG = AB:5$.

17*. 1) Данный отрезок AB разделить на части, находящиеся в отношении $m:n$, например, $3:2$ (черт. 6).

Реш. На произвольном отрезке AC откладываем от точки A до точки C пять равных произвольных частей так, что каждая часть равна a; соединив C и B, из точки P (третьей точки деления от A) ведем параллель BC; в пересечении получим искомую точку E, потому что $AE:EB = AP:PC = 3a:2a = 3:2$. Если m и n суть отрезки, а не числа, то надо отложить $AP = m$ и $CP = n$. Так как параллель прямой BC можно было провести из второй точки деления, считая от A, то, при неравных m и n, задача имеет вообще два решения. Если же относительное положение искомых отрезков должно быть определенное, например, больший отрезок должен исходить из точки A, то получим одно решение.



Черт. 6.

2) Данный отрезок AB продолжить до такой точки C, чтобы $AC:AB = m:n$.

Реш. Сходно с предыд. Так как прямая AB имеет два продолжения, то при $m > n$ задача имеет два решения.

Следующие задачи составляют прямое приложение задач 1—12, I и решаются непосредственно; стоит только начертить изображение искомой фигуры и сейчас же будет видно, что надо делать для ее построения.

18. Построить треугольник, зная a, b и c.

18. Построить параллелограм, зная стороны и одну диагональ.

19. Построить треугольник, зная A, C и b.

20. Построить треугольник, зная a, c и B.

21. Построить треугольник, зная c, C и $A = 90°$.

22. Построить треугольник, зная A, b и m_b.

23. Построить параллелограм по данным двум сторонам и углу между ними.

24. Построить треугольник, зная A, b_A и b.

25. Построить параллелограм по данной стороне и углам ее с двумя диагоналями.

26. Построить равнобедренный треугольник, зная высоту и угол при вершине.

27. Построить треугольник, зная a, b и m_b.

28. Построить параллелограм по данным: диагонали, основанию и углу между ними.

29. Построить параллелограм по углу между диагоналями и данным диагоналям.

30. Построить ромб по данным диагоналям.

31. Построить прямоугольник по данным: стороне и сумме его диагоналей.

Построить четырехугольник ABCD, зная

32. A, B, C, AB, AD.

33. AB, BC, CD, B и C.

34. AB, A, B, $\angle\angle CAB$ и DBA.

35. A, B, C, AD, CD.

36. AB, AC, AD, $\angle\angle CAB$ и DBA.

ГЛАВНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ И ВОПРОСЫ, ИМЕЮЩИЕ ПРИЛОЖЕНИЕ В ДАЛЬНЕЙШИХ ЗАДАЧАХ.

37. Чему равен угол между двумя прямыми MN и PQ, делящими пополам вертикальные $\angle\angle AOC$ и BOD, BOC и AOD? Чему равен угол между прямыми, делящими пополам два смежных $\angle\angle ABC$ и CBD?

38. 1) Полусумма двух сторон треугольника более медианы, лежащей между этими сторонами.

Реш. Дополним треугольник до параллелограма, проводя из двух вершин прямые, параллельные противоположным сторонам.

2) Периметр всякого треугольника более суммы его медиан (38).

39*. Отрезки основания треугольника, определяемые биссектором противоположного угла, вообще менее смежных с ними сторон.

40. Середины всевозможных отрезков, заключенных между двумя параллельными, лежат на одной прямой.

41. Хорды, одинаково наклоненные к одному радиусу в одной его точке, равны.

42. Хорды, одинаково наклоненные к одному диаметру в точках, равноотстоящих от центра, равны между собой.

43*. Если на стороне AC треугольника ABC отложить $AC_1 = AB$ и через конец D биссектора AD провести $MN \parallel AC$, то

$$\angle C_1DN - \angle CDM = A.$$

44. Если на стороне AB треугольника ABC взять точку D, а на ее продолжении точку C_1 так, что $AD = AC_1 = AC$, то $\angle BCD$ равен половине $(B - C)$, $2 \angle BCC_1 = 2C + A = 180° - (B - C)$ и $\angle DCC_1 = 90°$.

45. Если на стороне AC треугольника ABC взять точку C_1 так, что $BC = BC_1$, то $\angle C_1BC = A + B - C$.

46. В $\triangle ABC$ из центра O вписанной окружности проведен до AC отрезок $OE = OC$; тогда $2 \angle EOC = 180° + (A + B - C)$.

47. Перпендикуляр CD к биссектору CE встречает сторону AB треугольника ABC в D. Доказать, что $\angle EDC$ равен половине $(A - B)$ и равен углу между EC и высотой CK.

48. Зная углы четырехугольника $ABCD$, определить разность углов ABD и BDC.

49. Вершина X треугольника AXB лежит на прямой CD. Если A_1 есть точка, симметричная точке A относительно CD, то $\angle A_1XB$ не зависит от углов A и B, а зависит лишь от угла $A - B$.

Реш. $\angle A_1XB = 360° - 2 \angle A_1AB + (A - B)$.

50. Показать, что $\angle A_1XB$ (49, I) зависит только от разности углов CXA и DXB, а не от самых углов A, X и B.

51. Две касательные из внешней точки M к окружности O равны между собой; угол между ними делится прямой OM пополам.

52. Две окружности имеют внешнее или внутреннее касание, если расстояние их центров равно сумме или разности радиусов; окружности касаются, если их центры и точка пересечения лежат на одной прямой.

53. Около центров A и B описано несколько пар внешне касающихся окружностей. Показать, что внешняя общая касательная к каждой паре таких окружностей есть вместе с тем касательная к окружности, диаметр которой есть AB.

54. Если на отрезке AB описывать дуги различными радиусами, то дуга меньшего радиуса будет вмещать бóльший угол, и обратно.

55. В окружности O проведена хорда AB, которая вдвое более своего расстояния от центра. Определить $\angle AOB$.

56. Показать, что биссекторы углов между продолжениями двух равных хорд проходят через центр, и обратно.

57. Если в точке M данной окружности проведена касательная MB и хорда MA, то MB и MA находятся в равном расстоянии от середины дуги MA.

58. Окружность O, вписанная в $\triangle ABC$, касается его сторон BA, AC и BC в точках D, E и F; внешняя вписанная в угол A окруж-

ность касается тех же прямых в точках M, N и P. Доказать, что $2AD = AB + AC - BC$, $AB + AC + BC = 2AM$, $AD = AM - BC$, $BD + EC = BC = MB + CN$, $PF = AB - AC$, $DB - EC = AB - AC$ (51, I).

59. К трем данным концентрическим окружностям проведена секущая. Показать, что она дает между окружностями попарно равные отрезки и что касательная к средней окружности, проведенная из произвольной точки большей окружности, есть величина постоянная.

60. Если секущая, проведенная к двум данным концентрическим окружностям, дает между ними отрезок определенной длины, то этот отрезок виден из центра под определенным углом [1]) и обратно.

61. В четырехугольнике $ABCD$ берут точку B_1, симметричную B относительно AC. При каких условиях точка B_1 будет лежать на AD?

62. Вписываемый четырехугольник $ABCD$ повертывают около AC на $180°$; точка B переходит в B_1. При каких условиях точки A, C, B_1 и D будут лежать на одной окружности?

63. Центры окружностей данного радиуса, отсекающих от данной прямой хорды данной величины, лежат на двух определенных прямых.

64. Центры окружностей данного радиуса, пересекающих данные две параллели по хорде данной длины, лежат на двух известных прямых.

65*. На одном основании построено множество треугольников с равным углом при вершине. Отыскать геометрическое место пересечений высот, опущенных из концов общего основания.

66. На отрезке BC построено несколько треугольников так, что у них угол между высотами, опущенными из вершин C и B, один и тот же. Отыскать геометрическое место вершин этих треугольников (65, I).

67. Центры внешних вписанных в треугольник окружностей лежат на одной прямой с вершинами треугольника.

68. На основании BC построено несколько треугольников с равным углом при вершине. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в эти треугольники.

69. Если вписанный в окружность $\angle ABC$ опирается на данную дугу AC, то всякая прямая BE, образующая с BA новый данный угол, проходит через постоянную точку.

70. Две хорды, выходящие из точки касания двух касающихся окружностей, дают в этих окружностях две новые параллельные хорды.

Реш. Проведем общую касательную.

71. Если O есть центр описанной около $\triangle ABC$ окружности и $BD = h_b$, то b_B делит $\angle OBD$ пополам.

72. Внешние окружности O_1 и O_2, вписанные в углы B и C треугольника ABC, касаются сторон c и b в точках M и N; те же окружности касаются продолжений a в точках Q и R, а продолже-

---

[1]) Начиная с этой задачи считаются известными некоторые геометрические места, по меньшей мере I — V, II, см. отдел второй.

ния c — в точке P. Доказать, что $MP=a$, $QR=b+c$ и что угол между O_1O_2 и BC вдвое менее $B-C$.

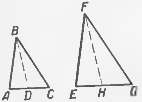
Для решения впишем в треугольник окружность.

73. На стороне AB треугольника ABC дана точка M; сколькими способами можно провести через нее прямую, отсекающую от $\triangle\ ABC$ подобный ему треугольник? *Отв.* 4 способами.

74. Если высота и отрезки основания, определенные этой высотой, одного треугольника пропорциональны тем же частям другого треугольника, то эти треугольники подобны.

75. В $\triangle\triangle\ ABC$ и DEF сторона $AB=DE$, $BC=EF$ и $A=D$. При каких условиях эти $\triangle\triangle$ равны? Равенство этих треугольников превратить в их подобие.

Реш. 1) Когда $BC>AB$; 2) когда C и F обе лежат или в наибольшем расстоянии от A и D, или в наименьшем.



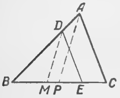
Черт. 7.

76. Доказать подобие треугольников, у которых пропорциональны периметры и отрезки, определенные на основаниях биссекторами противоположных углов.

Доказ. Допустим, что (1) $\frac{AB+BC+AC}{EF+FG+EG}=\frac{AD}{EH}=\frac{DC}{HG}$ (черт. 7). Из этой пропорции следуют две пропорции: $\frac{AC}{EG}=\frac{AD}{EH}$ и $\frac{AB+BC}{EF+FG}=\frac{AD}{EH}$ (2); по свойству биссектора угла треугольника имеем $\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}$ (3). Из пропорций (2) и (3) видно, что отношения соответственных сторон данных треугольников равны.

77. Доказать подобие треугольников, имеющих равные углы при вершине и равное отношение отрезков, определенных на основании высотами из равных углов.

Доказ. Пусть в треугольниках ABC и DEF имеем: $B=E$ и $AG:DH=GC:HF$. В $\angle ABG$ проведем отрезок $JK=DH$ так, чтобы $JK \parallel AG$, и продолжим его до пересечения с BC в L. Тогда $AG:JK=BG:BK=CG:KL$, что, по сравнению с данной пропорцией, дает $KL=HF$. Совмещая треугольники JBL и DEF основаниями, легко доказать их равенство.



Черт. 8.

78. Если в $\triangle\ ABC$ проведен отрезок $ED \parallel AC$ так, что DE составляет n-ую часть AC, то линейные элементы треугольника DBE (т. е. стороны, периметр, высоты, биссекторы и медианы, радиусы вписанной и описанной окружности и т. д.) будут меньше в n раз соответствующих элементов треугольника ABC.

Доказ. Возьмем (черт. 8) для примера медианы AP и DM. Из подобия $\triangle\ ABC$ и DBE выходит $AB:DB=BC:BE=n$, или

$AB:DB = BP:BM$. Треугольники DBM и ABP, имея по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами, подобны, и потому $AP:DM = AB:BD = n$; откуда $AP = DM \cdot n$. Умножить треугольник на какое-нибудь число n (оно может быть и дробное), значит, сохраняя углы треугольника, помножить на n одну сторону; так $\triangle DBE$ есть $\triangle ABC$, умноженный на $(1:n)$, и $\triangle ABC$ есть $\triangle DBE$, умноженный на n. Поэтому эта теорема может быть выражена так: „если треугольник умножить на число n, то все его линейные элементы умножатся на то же число n“.

79. Показать, что медианы AD, BE и CF треугольника ABC встречаются в одной точке G и делятся в ней в отношении $2:1$.

Доказ. Пусть G есть пересечение медиан AD и BE, прямая же CG встречает AB и DE в точках F и K. Из подобия треугольников ABC и DEC, AFC и EKC находим $AB = 2DE$ и $AF = 2EK$; затем из подобия треугольников BAG и DEG, BFG и EGK выходит $AG:GD = 2:1$, $BG:GE = 2:1$ и, наконец, $BF:EK = 2:1$, откуда $BF = 2EK$. Значит, $AF = BF$ и CG есть медиана.

80. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

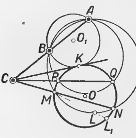
Реш. Через все вершины проведем параллели противоположным сторонам (79, I).

81. В $\triangle ABC$ вписан $\triangle DEF$ (E — на AB, F — на AC) так, что окружность, описанная на диаметре EF, касается BC в D. На продолжении FD отложено $DF_1 = DF$. Показать, что $FF_1 \perp BC$.

82. В выпуклой фигуре $ABCD$ на сторонах AB и CD взяты точки E и F так, что $AE:EB = DF:FC$. Проводят $EC_1 \parallel BC$ и $ED_1 \parallel AD$ так, что $EC_1 = BC$ и $ED_1 = AD$. Показать, что линия D_1FC_1 есть прямая.

83. В треугольниках AXB и DBZ углы $X = Z = 90°$, $ZB \perp BX$, AB и BD — по одну сторону BX. Если M и N суть середины AB и BD, то окружность, описанная на диаметре MN, делит XZ пополам.

84. Стороны квадрата или прямоугольника $ABCD$ проходят соответственно через точки M, N, P и Q. Перпендикуляр из M на NQ встречает CD в E. Показать, что $ME = NQ$ для квадрата, и $ME = (NQ \cdot AD):AB$ для прямоугольника.



Черт. 9.

85. В $\triangle ABX$ угол X вдвое более угла ABX. Если биссектор угла X встречает AB в Y, то $AX^2 = AY \cdot AB$.

86. Если через данные точки A и B (черт. 9) провести сколько угодно окружностей, встречающих данную окружность O в точках M и N, P и Q, D и E и т.д., то все секущие MN, PQ, DE... пересекут AB в одной и той же точке C.

Доказ. Вообразим через точки A и B окружность, касательную к окружности O в точке K. Общая к окружностям O и O_1 каса-

тельная встретит AB в C. Пусть продолжением отрезка CM будет не прямая MN, а прямая ML, встречающая окружность O в L_1, а окружность $BANM$ в L. Тогда по свойству секущих $AC \cdot CB = CK^2$, $AC \cdot CB = CL \cdot CM$ и $KC^2 = CL_1 \cdot CM$, откуда $CL \cdot CM = CL_1 \cdot CM$ и $CL = CL_1$, что невозможно. Следовательно, прямая CM должна слиться с прямой MN.

87. В данную окружность вписан треугольник так, что две его стороны проходят через данные точки M и N, а третья видна из M и N под равными углами. Показать, что третья сторона проходит через некоторую постоянную точку (86, I).

88. Если точки A, B, D и E, лежащие на пересекающихся прямых AC и DC, удовлетворяют равенству $AC \cdot BC = DC \cdot EC$, то они лежат на определенной окружности (точка C может быть внутри или вне этой окружности).

Доказ. Проведем через A, B и E окружность и предположим, что она пройдет не через точку D. Теорема остается справедливой, если точки A и B сливаются.

89. Показать, что радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен трети его высоты.

90. В $\triangle ABC$ даны a, c и h_b. Определить R.

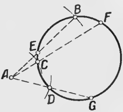
Реш. Если BOE есть диаметр описанной окружности, O — ее центр, то из треугольников ABD и BEC находим $R = \frac{ac}{2h_b}$.

91. Высоты всякого треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам.

Реш. Возьмем выражения площади.

92. Зная все три высоты треугольника, определить отношение его сторон.

Реш. Если высоты h, h_1 и h_2 даны в числах, то стороны треугольника будут пропорциональны h_1, h, $\frac{hh_1}{h_2}$. Если же h, h_1 и h_2 только начерчены, то берут произвольную окружность и точку A (черт. 10) вне ее. Из центра A чертят три дуги радиусами h, h_1 и h_2 до встречи с окружностью в точках B, C и D и продолжают секущие AC и AD. Стороны треугольника пропорциональны отрезкам AE, AF и AG. Это следует из равенства $AE \cdot AB = AF \cdot AC = AG \cdot AD$.



Черт. 10.

93. Если в угле B треугольника ABC проведен отрезок $CD \parallel b_A$, то

$$CD = b_A \cdot (b + c) : c.$$

94. Основания высот треугольника ABC суть D, E и F. Показать, что биссекторы треугольника DEF совпадают с высотами треугольника ABC (80, I).

Реш. Если O есть пересечение высот, то основания двух высот лежат на окружности, которой диаметр есть AO.

95. Если O есть центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, и AO встречает описанную окружность в E, то $AO \cdot OE = 2Rr$, $OE = EB = EC$, $AO^2 = 2R(h_a - 2r)$, и описанная окружность O_1 касается прямой, проведенной от a на расстоянии, равном $r^2 : (h_a - 2r)$.

96. Даны три концентрические окружности. Секущая встречает эти окружности, начиная с большей, в точках X, Y, Z, U, V и W, так что $ZU = 2XY$. Определить отношение $XY : YZ$.

Реш. Проведем касательные XM к средней окружности и YN к малой окружности (59, I). Из уравнений $MX^2 = (XY + 2YZ + 2XY) \cdot XY$ и $NY^2 = YZ(2YX + YZ)$ найдем требуемое.

97. Две пересекающиеся в A и B окружности O и O_1 пересечены секущей $XYZU$ (X и Z — на окружности O) так, что $XY = YZ = ZU$. Показать, что AB делит YZ пополам, и определить отношение $YZ : OZ$.

Реш. Проведем $YM \parallel OO_1$ и $YN \parallel OZ$ до пересечения с O_1Z в M и N. Тогда $ZO_1 = NM$, и точка Y есть центр трех концентрических окружностей известных радиусов. Можно определить (96, I) отношение $ZO_1 : O_1N$, а затем $YZ : YN$.

98. К четырем концентрическим окружностям проведена секущая $XYZU$ (X — на большей, U — на меньшей окружности) так, что $XY = ZU$. Определить $XY : YZ$.

Реш. Проведем касательные YM к меньшей окружности и XN к следующей окружности.

99. 1) У равновеликих параллелограмов высоты обратно пропорциональны основаниям.

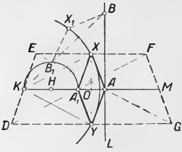
2) Трапеции равновелики, если их высоты обратно пропорциональны медианам непараллельных сторон.

100. Если прямая, пересекающая параллельные стороны трапеции, делит ее пополам, то она проходит через известную точку.

101. Периметры равновеликих многоугольников обратно пропорциональны радиусам вписанных в них окружностей.

102. Найти площадь треугольника, зная abc и R (90, I).

103. Если два треугольника вписаны в окружность и имеют общее основание, то произведения других сторон пропорциональны высотам, опущенным на общее основание (90, I).



Черт. 11.

104. Доказать подобие треугольников, имеющих общий угол A и одинаковое отношение $a : h_A$ (сходно с 77, I).

105. Сумма перпендикуляров из вершин треугольника на произвольную прямую равна утроенному перпендикуляру на ту же прямую из центра тяжести треугольника (79, I).

106. Имеем подвижной ромб A_1XAY (черт. 11) с постоянной стороной и неподвижную точку K, так что $KX = KY$ и длина KY есть

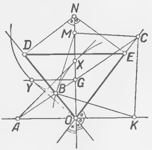
постоянная. Если точка A будет двигаться по прямой $AB \perp KA$, то точка A_1 будет двигаться по окружности, которой диаметр равен KA_1, и обратно.

Реш. $AK \cdot A_1K = KO^2 - AO^2 = KX^2 - AX^2 = k^2$, где k есть постоянная. Если точка A перейдет в B, точка A_1 переместится в B_1 и будем иметь $KB \cdot KB_1 = k^2$, откуда $KB \cdot KB_1 = KA \cdot KA_1$; треугольники AKB и A_1KB_1 подобны (г. м. V).

107. В равнобочной трапеции $DEFG$ (черт. 11) длины DE и DF — постоянные; EF и DG — переменные. Диагонали встречают медиану непараллельных сторон KM в точках A_1 и A. Если точка K неподвижна, то при движении точки A по прямой $AB \perp KM$ точка A_1 будет двигаться по окружности, диаметр которой есть KA_1, и обратно.

Реш. Соединим середины X и Y сторон EF и DG с A и A_1. Тогда получим ромб A_1XAY с постоянной стороной. Так как $KX = KY = DF : 2$, то задача приведена к 106, I. Очевидно, $KA \cdot KA_1$ в 4 раза меньше k^2.

108, a. Равнобедренный $\triangle DOE$ ($OD = OE$, черт. 12), оставаясь постоянным, скользит концами D и E по сторонам угла DOE. Доказать: 1) что при этом движении точка O будет двигаться по биссектору OK угла, смежного с $\angle DOE$; 2) когда $\triangle DOE$ займет положение BKC, в котором BC встречает OK в точке A, то касательная из A к окружности, описанной из центра K радиусом, равным OE, дает точку касания X, находящуюся на биссекторе угла DOE.



Черт. 12.

Для решения рассмотрим окружность $ODNE$ (69, I).

108, b. Восставим в D и E предыдущей задачи перпендикуляры к OD и EO до встречи их в N (черт. 12). Доказать: 1) если $\triangle DNE$, оставаясь постоянным, скользит концами D и E по сторонам угла DOE, то точка N будет двигаться по ON; 2) когда же $\triangle DNE$ займет положение BMC, при котором $BC = DE$ проходит через точку G биссектора ON, то касательная из O к окружности, описанной из центра M радиусом NE, определяет точку касания Y, которая лежит на прямой $GY \perp OM$.

109. Если SO есть высота пирамиды и AB одна из сторон основания, то при движении точки S к точке O, угол ASB все увеличивается.

Реш. Если S переходит в X, то $\triangle AXB$ вращением около оси AB надо совместить с плоскостью ASB. Проведем высоту из S на AB и применим 54, I. На основании этой теоремы легко доказать, что сумма плоских углов многогранного угла менее $4d$.

110. Точка A движется по окружности O. Пусть B есть подвижная проекция точки A на данный неподвижный диаметр. Доказать, что биссектор угла OAB проходит через неподвижную точку.

111. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в E, стороны AB и CD — в H. Если точки A и D неподвижны, а сторона BC, сохраняя свою длину и расстояние от AD, движется, то точки E и H двигаются параллельно AD.

Реш. Прямая HE делит AD пополам.

112. Внутри окружности O дана точка K. По окружности движется точка X. На продолжении KX откладывают KX_1 так, чтобы $KX \cdot KX_1 = k^2$. Доказать, что точка X_1 описывает определенную окружность (черт. 89).

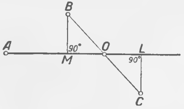
ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ.

Прежде чем говорить о способах аналитического решения задач на построение, предлагаем несколько примеров с подробным объяснением. Решение всякой задачи делится на четыре части: 1) отыскание решения (оно начинается с того, что задача предполагается решенной), 2) построение, 3) доказательство и 4) исследование решения.

1. *Через точку A провести прямую, проходящую между данными точками B и C и находящуюся от них на равном расстоянии.*

1) *Отыскание решения.* Пусть искомая прямая есть AL (черт. 13), так что перпендикуляры MB и LC равны. Так как прямая определяется двумя точками, и одна из них, именно, точка A, известна, то будем искать на искомой прямой другую точку. Для этого попробуем соединить точки B и C и определить положение получившейся точки O. Треугольники BMO и OLC, имеющие равными катет и острый угол, равны, и потому $OB = OC$. Это равенство показывает, что точка O есть середина BC.



Черт. 13.

2) *Построение.* Разделим BC пополам в точке O (4, I); прямая AO проходит в равном расстоянии от точек B и C.

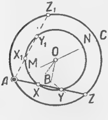
3) *Доказательство.* Опускаем перпендикуляры BM и CL; треугольники BMO и OLC равны; следовательно, $MB = CL$.

4) *Исследование.* Очевидно, что решение только и может быть одно. Задача всегда возможна. Если точка A приходится где-нибудь на отрезке BC не в точке O, искомая прямая сливается с BC; если же точка A приходится в точке O, то всякая прямая, проходящая через O, будет удовлетворять условиям вопроса. Заметим, что решение существенно не изменится, если вместо равенства BM и LC дано их отношение (17, I).

2. *Даны две концентрические окружности O и точка A на бо́льшей окружности. Провести секущую AXYZ так, чтобы* $AZ = 3XY$ (черт. 14).

1) Пусть $OB \perp XY$. Тогда $AB = BZ$, $XB = BY$, и потому $AB = 3XB$, откуда видно, что $AX = 2BX$, а потому $AX = XY$.

Для определения точки Y попробуем провести диаметр AC и соединим C и Y. Так как $AO = OC$ и $AX = XY$, то из подобия треугольников AXO и ACY отрезок $YC = 2\ OX$. Это показывает, что точка Y лежит на окружности, описанной из центра C радиусом, равным диаметру меньшей окружности.



Черт. 14.

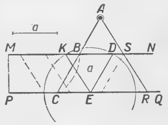
2) Из центра C опишем окружность радиусом, равным MN; эта окружность встретит данную окружность в точке Y. Секущая AY есть искомая.

3) Так как $AC : AO = CY : OX = 2$, то (75, I) $\triangle\triangle$ AOX и ACY подобны, и потому $AX = XY$ или $AZ = 3XY$.

4) Если $MN = NC$, будет одно решение (52, I), и искомая секущая будет AC. Если $MN > NC$, получим два решения; при $MN < NC$ задача невозможна.

3. *Через точку A провести прямую так, чтобы ее отрезок между параллелями MN и PQ был равен данному отрезку a.*

1) Пусть прямая AC (черт. 15) проведена через точку A так, что отрезок $BC = a$. Задача приводится к определению угла ACR. Поэтому проведем где-нибудь $DE \parallel AC$; тогда $DE = a$, и, сколько бы таких отрезков мы ни проводили, каждый из них будет равен a. Точка E взята произвольно, и так как $DE = a$, то точка D отстоит от E на расстоянии, равном a, и потому лежит на окружности, описанной из центра E радиусом a.

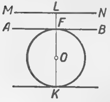


Черт. 15.

2) Нужно из произвольной точки E прямой PQ описать радиусом a дугу, которая пересечет MN в точках D и K; затем надо соединить D и K с E и провести из A прямую параллельно или ED или KE (14, I). Получатся две прямые AC и AR.

3) $BC = DE$ и $SR = EK$, как отрезки параллельных между параллелями; но так как окружность начерчена радиусом a, то $DE = EK = a$, а потому и $BC = SR = a$.

4) Задача вообще имеет два решения и всегда будет возможна, за исключением того случая, когда длина a меньше расстояния прямых MN и PQ; если $MP = a$, то будет только одно решение, и искомая прямая перпендикулярна к MN.



Черт. 16.

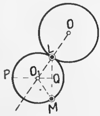
4. *К данной окружности O провести касательную в данной на ней точке M* (7, I).

5. *К данной окружности O провести касательную, параллельную данной прямой MN.*

1) Пусть касательная будет $AB \parallel MN$, и F — точка касания (черт. 16). Вся задача сводится к определению точки F; если бы мы знали ее положение, то оставалось бы провести касательную к окружности в точке F (4, II). Продолжив радиус

OF до пересечения с прямой MN, видим, что $OF \perp AB$, а потому и $OL \perp MN$; искомая же точка F есть точка встречи перпендикуляра OL с окружностью O.

2) Чтобы решить задачу, нужно из O опустить перпендикуляр на прямую MN (8, I) и в точке пересечения его с окружностью провести к окружности касательную.



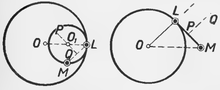
Черт. 17.

3) $\angle\angle OLN$ и OFB соответственные и равны, как прямые; поэтому $AB \parallel MN$ и касается к окружности по построению.

4) Всегда два решения.

6. *Через данную точку M провести окружность, касательную к данной окружности O в данной на ней точке L* (черт. 17).

1) Пусть окружность O_1 есть искомая. Надо найти центр O_1. Так как точка касания двух окружностей лежит на одной прямой с центрами, то искомый центр должен лежать на прямой OL. Соединив точки M и L, замечаем, что прямая LM должна быть хордой искомой окружности; след., искомый центр O_1 должен лежать на перпендикуляре PQ; окончательно, он лежит в точке пересечения OL и PQ.



Черт. 18.

2) Чтобы решить задачу, надо соединить L и O и продолжить OL, из середины LM восставить перпендикуляр PQ, который пересечет OL в искомой точке O_1; искомый радиус будет O_1M.

3) Если сделаем указанное построение, то $O_1L = O_1M$ как наклонные, имеющие равные проекции; следовательно, окружность, описанная из центра O_1 радиусом O_1M, пройдет через точки L и M; затем, она коснется окружности O, так как расстояние центров равняется сумме радиусов.

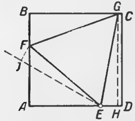
4) Если точка M дана внутри окружности O (черт. 18), то решение остается то же с той разницей, что тогда касание окружностей будет внутреннее и расстояние центров будет равно разности радиусов. Если точка M приходится на окружности O, искомая окружность сливается с данной. Если же точка M лежит на касательной ML (черт. 18), то задача становится невозможной, потому что перпендикуляр PQ и прямая OL становятся параллельными и не дают никакой точки пересечения. Условие возможной задачи будет

$$OM^2 \neq OL^2 + LM^2.$$

7. *Начертить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина лежала в данной точке E, а другие две — на сторонах данного прямого угла ABC.*

1) Пусть равносторонний $\triangle EFG$ будет искомый. Задача сводится к определению точки F. Проведем $GH \parallel AB$ и $EA \parallel BC$ (черт. 19).

Чтобы иметь треугольник, равный $\triangle EGH$, по другую сторону чертежа, построим $\angle FEJ = \angle EGH$ и опустим $FJ \perp EJ$. Так как $\triangle\triangle JEF$ и EGH равны, то $EJ = GH$; но отрезок GH известен, и потому, чтобы определить точку F, достаточно определить величину $\angle JEA$. Выводим следствия из полученного чертежа. По свойству внешнего угла $\angle AEG = \angle EGH + \angle EHG$; но $\angle AEG = \angle AEJ + \angle JEF + 60°$, поэтому $\angle AEJ + \angle JEF + 60° = \angle EGH + 90°$. Отсюда $\angle AEJ = 30°$.



Черт. 19.

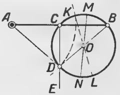
2) Последнее следствие указывает на следующее построение. При точке E построим $\angle JEA = 30°$ [1]) и на его стороне отложим $JE = AB$; в точке J восставим $JF \perp JE$ до встречи с AB в точке F. Остается из центра E описать дугу радиусом EF до встречи с BC в точке G.

3) Докажем, что $\triangle EGF$ будет равносторонний. Для этого ведем рассуждение в обратном порядке. Треугольники EGH и JEF ($JE = GH$ и $FE = EG$ по построению) равны; след., $\angle JEF = \angle EGH$. Но $\angle AEG = \angle EGH + 90°$, или $30° + \angle JEF + \angle FEG = \angle EGH + 90°$, откуда $\angle GEF = 60°$. Если же так, то $\triangle EFG$ — равносторонний.

4) Задача возможна только тогда, когда дуга FG встретит сторону BC. Если точка E сливается с точкой A, то сторона GE образует с AB угол в $60°$, и точка F придется на протяжении AB [2]).

8. *Даны окружность O и вне ее точка A; через A провести секущую так, чтобы она окружностью разделилась пополам* (черт. 20).

1) Пусть секущая AB проведена так, что $AC = CB$. Задача сводится к определению точки B. Проведя диаметр BD, видим, что вместо положения точки B можно искать положение точки D. Соединим D с точками A и C и выведем следствия из полученного чертежа. Так как $\angle DCB$ опирается на диаметр, то он прямой, и прямоугольные треугольники DAC и DCB, в которых катет CD общий и $AC = CB$ по условию, равны, а потому $AD = DB$. Стало быть, отрезок AD равен диаметру окружности O. Теперь ясно, что точка D лежит на окружности, описанной из центра A радиусом, равным диаметру MN.



Черт. 20.

---

[1]) Для этого не надо пользоваться транспортиром, а нужно построить какой-нибудь равносторонний треугольник, разделить один из его углов пополам и затем применить 9, 1.

[2]) На самом деле указанное решение этой задачи вовсе не так случайно, как здесь кажется. Очевидно, $\triangle EGH$ мы переносим в положение $\triangle JFE$ и потому пользуемся или методом перенесения или методом вращения.

2) Опишем из центра A окружность радиусом, равным MN, и точку пересечения D соединим с O; продолжим DO до пересечения с окружностью в B и точку B соединим с A.

3) $\triangle ADB$ по построению — равнобедренный; прямая DC — его высота, потому что $\angle DCB$, как опирающийся на диаметр DB, прямой; след., $AC = CB$.

4) Другое решение получим, соединив точки K и O, продолжив KO до L и соединив L с A. Пусть радиус данной окружности будет r. Задача имеет одно решение, когда окружность, проведенная из центра A радиусом $2r$, касается окружности O; задача вовсе невозможна, если окружность DK, описанная из центра A, не пересечет окружности O. Следовательно, условие возможности нашей задачи будет $AO \leqslant 3r$ (52, I).

Из этих примеров видно, что когда мы предположим задачу решенной, у нас составится некоторый чертеж; по чертежу мы заметим, что решение задачи сводится на определение положения некоторой точки или прямой или на определение величины некоторого угла. Затем из полученного чертежа надо выводить различные следствия относительно положения этой точки или прямой. Если по этим следствиям сразу видно, как найти положение той точки или прямой, на определение которой сведена задача, то решение задачи найдено. В противном случае определение неизвестных очень часто бывает выгодно заменить определением других вспомогательных неизвестных точек, отрезков и прямых (как это было сделано в задачах 3, 7 и 8). С этой целью очень часто наудачу и еще чаще руководясь известными геометрическими теоремами надо проводить различные прямые, строить вспомогательные углы, проводить параллели или окружности и т. д.; таким образом неизвестные заменятся другими, положение которых следует определить, выводя следствия из вновь полученного чертежа. Когда неизвестные определятся по этим следствиям, то решение задачи будет найдено. Остроумие решающего состоит в возможной простоте определения вспомогательной точки или прямой.

Таким образом находятся решения задач. Когда решение задачи найдено, то следует его выполнить и доказать, что требуемые условия удовлетворены. При этом ход рассуждений будет обратный тому, который был при отыскании решения. Затем надо исследовать найденное решение, т. е. определить число решений и те условия, при которых задача становится возможной и невозможной.

Все это уяснится лучше, если, подобно первым 8 примерам, переделать нижеследующие задачи.

9*. Даны три точки. Провести через них параллельные прямые так, чтобы расстояния между ними были равны.

Три решения. Вместо равенства можно дать отношение.

9. Даны: прямая MN и точки A и B. Найти на прямой AB точку так, чтобы ее расстояние от MN было вдвое менее суммы расстояний точек A и B от MN.

10. Равными радиусами из центров A и B описать две окружности так, чтобы общая к ним касательная проходила через данную точку (1, II). Вместо равенства радиусов можно дать их отношение (17, I).

10*. Из центров A и B описать равными радиусами две окружности так, чтобы общая к ним касательная касалась данной окружности O.

11. В данном угле провести отрезок данной длины и данного направления (19, I).

12*. Начертить параллелограм так, чтобы середины трех его сторон были в трех данных точках.

12. Построить треугольник, зная середины его сторон.

13. Провести прямую, находящуюся в равных расстояниях от трех данных точек. 3 решения.

13. Провести прямую, проходящую в равном расстоянии как от точек A и B, так и от точек C и D.

14*. Даны две точки и окружность. Провести через данные точки две параллельные прямые, определяющие в окружности две равные хорды.

14. Через точки A и B провести окружность, касательную к прямой CD, которая параллельна AB.

15. Через данную точку A внутри данного $\angle BCD$ провести прямую так, чтобы она отсекала равные части от сторон угла.

16. Построить $\triangle ABC$, зная высоту BD и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD.

17. Даны треугольник и две концентрические окружности. Требуется начертить третью концентрическую окружность так, чтобы данный треугольник можно было поместить вершинами на трех окружностях (шесть случаев).

18. Даны два угла с параллельными сторонами так, что две их смежные стороны встречаются в точке X. Провести секущую XZY так, чтобы ее отрезки в углах были равны ($ZX = XY$).

19*. Начертить параллелограм так, чтобы две противоположные вершины были в данных точках, а две другие на данной окружности O.

20. Дан прямоугольный треугольник. Через вершину прямого угла начертить окружность, касательную к гипотенузе так, чтобы центр лежал на одном из катетов.

21*. Даны две равные окружности и точка. Через эту точку провести секущую, определяющую в окружностях равные хорды (два случая).

21. Даны две равные пересекающиеся окружности. Через точку их встречи провести две равные хорды так, чтобы угол между ними был данной величины.

22. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую, образующую в окружностях две хорды или равные или находящиеся в данном отношении. (Надо опустить из центров перпендикуляры на искомую секущую.)

22. Построить $\triangle ABC$, зная медиану BD и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD.

23. Через точку пересечения A двух окружностей O и O_1 провести секущую BAC так, чтобы углы BOA и CO_1A были равны (22, II).

24. Из данного центра A описать окружность, встречающую данную окружность под прямым углом [1]).

24. Провести две равные окружности, пересекающиеся в данных точках A и B под данным углом.

25. На стороне угла A дана точка X. Провести в угле отрезок XY так, чтобы $\angle AXY = 3 \angle AYX$.

25. Даны два равных отрезка AB и AC. На данной окружности найти точку, из которой AB и AC были бы видны под равными углами.

26*. Из данного центра A описать окружность, делящую пополам данную окружность O.

27. На продолжении диаметра AB данной окружности O найти точку, касательная из которой к окружности равняется радиусу.

28. Начертить квадрат $ABCD$ так, чтобы A и B были на данной окружности O, а C и D — на данной прямой.

Реш. Если E есть середина CD, то $\angle AEO$ известен.

29*. На стороне AC треугольника ABC найти точку X так, чтобы $AX \cdot AC = AB^2$.

30. Провести окружность, касающуюся одинаковым образом данных трех равных окружностей.

31. Провести прямую, отрезок которой между данными параллельными прямыми был бы данной длины, так, чтобы отношение расстояния этого отрезка до данных точек A и B было данное (17, I).

31. Между двумя параллельными прямыми провести отрезок данной длины так, чтобы продолжение его коснулось данной окружности.

32*. Через две данные точки провести окружность, которая в пересечении с данной окружностью дала бы хорду, параллельную данной прямой (5, II).

32. Провести окружность, касательную к данной окружности в данной на ней точке и встречающую другую данную окружность по хорде, которая делится пополам перпендикуляром из данной точки.

33. Построить прямоугольник $ABCD$, зная AC и угол BAM, равный разности углов BAC и CAD (12, I).

34*. Через данную точку провести окружность, касательную к двум данным параллелям.

34. Даны окружность и к ней две параллельные (в M и N) касательные. Провести новую касательную, пересекающую данные параллели в X и Y так, что $MX + NY$ равна данной длине.

---

[1]) Углом между пересекающимися окружностями называется угол между касательными, проведенными в точке встречи.

35. Через точку A провести к сторонам $\angle BCD$ секущую так, чтобы отрезки ее между сторонами угла и точкой A находились в данном отношении.

35. На окружности даны точка A и хорда BC. Провести хорду AD так, чтобы она разделилась хордой BC в данном отношении.

36. Даны две точки A и B на двух параллельных прямых и точка C вне их. Через точку C провести секущую, встречающую данные прямые в точках D и E так, чтобы отношение AD и BE было данное. *Реш.* Если прямая DE встречает AB в точке G, то $AG:BG = AD:BE$ (17, I).

36. Даны два параллельных отрезка AB и CD. Провести к ним секущую XY так, чтобы $AX:CY$ и $BX:DY$ были данной величины.

37. В данную окружность вписать трапецию $ABCD$ так, чтобы дуга BC была в два раза (вообще в 2^n раз) менее дуги $ABCD$ и сторона AB была данной длины.

38. Построить равносторонний треугольник, зная радиус вписанной окружности (89, I).

38. Построить равносторонний треугольник, зная сумму высоты и радиуса описанной окружности.

39. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, зная сумму (или разность) гипотенузы и опущенной на нее высоты.

40*. В данный равносторонний треугольник вписать такой же треугольник так, чтобы вершина его находилась в данной точке.

41. Построить треугольник, зная h_c и два отрезка, соединяющие C с точками, делящими AB на 3 равные части (вообще на части, отношение которых дано).

42. Даны две параллельные прямые AB и CD и окружность O. Через данные на AB точки G и H провести секущие XGY и XHZ так, чтобы точка X была на окружности и $YZ = ZX$.

42. Даны два параллельных отрезка AB и CD. Отыскать на них по точке X и Y так, чтобы $AX:CY$ было данной величины и

$$\angle XBY = \angle XDY.$$

43. Через точку A радиусом R провести окружность так, чтобы касательная к ней из точки B имела данную длину.

44. В квадрат $ABCD$ вписать новый квадрат так, чтобы одна его вершина находилась в точке, данной на стороне AB.

44. В данный правильный шестиугольник вписать такой же шестиугольник так, чтобы одна его вершина была в точке, данной на одной из сторон.

45. В данный прямоугольник $ABCD$ вписать новый прямоугольник, вершина которого лежала бы в точке M, данной на стороне AD. *Реш.* Отложим на BC часть $CP = AM$; MP будет диагональю искомой фигуры.

46. В данный прямоугольник вписать ромб так, чтобы они имели общую диагональ.

47. Разделить угол в 90°, 45° или в 135° на три равные части. *Реш.* Две трети прямого угла составляют угол равностороннего

треугольника (10, 11, 12, I). Если мы сумеем делить на 3 части данные углы, то уже легко делить на три равные части половины, четверти и т. д. этих углов.

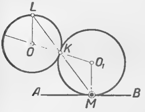
48. Даны три равные окружности. Найти точку, касательные из которой к данным окружностям равны между собой.

49. Провести отрезок между двумя параллельными прямыми так, чтобы он разделился пополам перпендикуляром из данной точки и имел определенную длину (40, I).

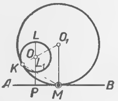
50. В данную окружность вписать трапецию так, чтобы одна ее боковая сторона была данной длины и отношение параллельных сторон было данное.

Реш. Продолжим боковые стороны до встречи (17, I).

51. *Провести окружность, касательную к данной окружности O и к прямой AB в данной ее точке M.* Искомый центр O_1 должен лежать (черт. 21) на прямой O_1M, которую сумеем построить (7, I); кроме того замечаем, что O_1 лежит еще на прямой OO_1. Так как центры касательных окружностей лежат с точкой касания на одной прямой, то вопрос сводится к определению точки K. Поэтому попробуем соединить K и M и продолжить KM.



Черт. 21.



Черт. 22.

Определение точки K сведем на определение точки L, потому что, если знаем, где находится точка L, сейчас же найдем и точку K. Из подобия $\triangle\triangle\, OLK$ и MO_1K следует, что $\angle LOK = \angle KO_1M$; поэтому $OL \parallel O_1M$, что и дает возможность определить точку L. Далее, легко найти точку K в пересечении ML с окружностью O; проводя затем OK, в пересечении с прямой O_1M найдем искомый центр O_1.

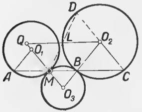
Начертив из центра O_1 окружность радиусом O_1M, докажем, что она будет касательна к прямой AB в точке M и к окружности O. Первое видно из теоремы: „прямая, пересекающая радиус на окружности под прямым углом, есть касательная". Далее из $\triangle\triangle\, OLK$ и O_1MK выходит $O_1M : OL = O_1K : OK$; но $OL = OK$, след., $O_1M = O_1K$ (52, I).

Это очень простое решение годится и для того случая, когда окружности O и O_1 коснутся внутренним образом (черт. 22). Точка L_1, к определению которой приводится задача, получится, если продолжить OL в другую сторону. Таким образом, задача всегда возможна. Что делать, если точка M приходится в точке P?

51. Провести окружность, касательную к данной окружности в данной точке и к данной прямой.

52. *Провести окружность, касательную к двум данным окружностям и к одной из них в данной точке* (черт. 23). Пусть иско-

мая окружность O_3 касается окружности O_1 в данной на ней точке M и окружности O_2. Так как центры касательных окружностей и точка касания лежат на одной прямой, то искомый центр лежит в пересечении O_1M и O_2B. Прямая O_1M известна, и потому задача приводится к определению положения точки B. Соединяем точки M и B и отыскание точки B сводим на определение точки C. Выведем следствия из составившегося чертежа: $\angle O_1MA = \angle O_3MB$, $\angle O_3MB = \angle MBO_3$, $\angle MBO_3 = \angle O_2BC$ и $\angle O_2BC = \angle O_2CB$. Из этих равенств следует, что $\angle O_1MA = \angle O_2CB$, и, след., $O_1M \parallel O_2C$.



Черт. 23.

Последнее следствие указывает, что для решения задачи надо провести $O_2C \parallel O_1M$, точку M соединить с C, полученную точку B соединить с O_2; прямые O_1M и O_2B определят точку O_3. Достаточно доказать, что $O_3M = O_3B$. Из чертежа видно, что $\angle O_3MB = \angle O_1MA = \angle O_2CB$ и $\angle O_3BM = \angle O_2BC = \angle O_2CB$; след., $\angle O_3MB = \angle O_3BM$ и $MO_3 = BO_3$ (52, 1).

Продолжив O_2C и соединив полученную точку D с M, находим новую точку L. Если продолжим O_2L до пересечения в точке Q с O_1M, то Q будет центр новой окружности, которая к окружности O_1 имеет внутреннее касание, а к окружности O_2 касается в точке L. Задача имеет два решения и всегда возможна. Если точка M есть точка касания общей касательной к окружностям O_1 и O_2, радиусы O_1M и O_2B выходят параллельными: тогда получается только одно решение [1]).

52. Провести окружность O_3, касательную к двум данным окружностям O_1 и O_2, так, чтобы общая касательная к окружностям O_2 и O_3 прошла через данную точку.

Метод геометрических мест.

Геометрическим местом точек называется совокупность точек, обладающих свойствами, исключительно им принадлежащими. Если задача приводится к определению точки, то можно отбросить одно из условий, которому эта точка должна удовлетворять; тогда искомая точка станет способна принять бесчисленное количество последовательных положений, и все эти положения составят геометрическое место точек, обладающих всеми требуемыми свойствами, кроме отброшенного. Фигура этого геометрического места чаще бывает нам заранее известна; в противном случае ее надо определить вспомогательными построениями. Затем, приняв отброшенное условие и откинув какое-нибудь другое условие задачи, мы вновь увидим,

[1]) Эта задача решается легче другим способом. Отложим на радиусе MO_1 от точки M к точке O_1 часть MK, равную O_2B; из середины отрезка KO_2 восставим перпендикуляр. Этот перпендикуляр встретит O_1M в искомой точке.

что искомая точка станет способна принять бесчисленное множество новых положений, образующих новое геометрическое место. Определим фигуру этого нового геометрического места, если она нам неизвестна. Тогда искомая точка должна лежать и на первом и на втором геометрическом месте, а потому определяется их пересечением.

Иногда для определения точки достаточно построить одно геометрическое место, потому что другое дано в условии задачи. Если же искомая точка подчинена таким условиям, которые все в совокупности определяют только одно геометрическое место, то задача становится неопределенной.

Отсюда видно, как важно знать различные геометрические места. Знание геометрических мест иногда позволяет сразу видеть, где находится неизвестная точка. Так, если точка должна находиться на расстоянии a от прямой AB, то она лежит где-нибудь на прямой CD, параллельной AB и отстоящей от нее на расстоянии a, и т. д.

Из множества геометрических мест укажем следующие:

I. Геометрическое место точек, отстоящих на расстоянии, равном a, от данной точки M, есть окружность, описанная из центра M радиусом a.

II. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек M и N, есть перпендикуляр, восставленный к отрезку MN в его середине.

III. Геометрическое место точек, отстоящих на данном расстоянии a от прямой AB, составляют две прямые CD и MN, отстоящие от AB на расстоянии a.

IV. Геометрическое место точек, делящих в данном отношении параллельные отрезки прямых, проведенных в данном угле, есть прямая, проходящая через вершину этого угла и одну из таких точек [1]).

Следствия этой теоремы следующие:

1. Геометрическое место середин отрезков, проведенных параллельно основанию треугольника, есть медиана основания. Для равнобедренного треугольника такое геометрическое место есть высота.

2. Все точки, расстояния которых до сторон данного угла находятся в данном отношении, составляют прямую, проходящую через вершину угла и через одну из таких точек. Для доказательства через одну из этих точек надо провести прямую, отсекающую от данного угла равнобедренный треугольник (г. м. IV).

3. Прямая, делящая угол пополам, есть геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон этого угла, или точек, равноотстоящих от сторон угла. Следует из г. м. IV, 2.

V. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляют две дуги, описанные на данном отрезке и вмещающие данный угол (черт. 29, 57, II).

---

[1]) Это геометрическое место можно рассматривать в общем виде (см. 264, II). Относительное положение отрезков в угле принимается в расчет; в противном случае IV геометрическое место составят две прямые, а не одна.

Следствие. Вершину прямого угла прямоугольного треугольника всегда надо искать на полуокружности, диаметр которой есть гипотенуза; вершину всякого треугольника, если известен угол при ней, должно искать на дуге, описанной на основании и вмещающей известный угол.

VI. Геометрическое место середин равных хорд, проведенных в данной окружности О, есть концентрическая окружность, касательная к одной из этих равных хорд* (60, II и черт. 32).

Эту теорему можно обобщить и выразить так:

Геометрическое место точек, делящих в известном отношении равные хорды, проведенные в данной окружности, есть концентрическая окружность, радиус которой равен расстоянию данного центра от одной из точек всего геометрического места.

VII. Точки, из которых данная окружность О видна под данным углом m (т. е., точки, из которых две касательные к окружности O образуют между собой угол m), *составляют концентрическую окружность определенного радиуса* (61, II и черт. 33).

VIII. Все точки, касательные из которых к данной окружности радиуса r равны данному отрезку a, составляют концентрическую окружность радиуса, равного $\sqrt{a^2+r^2}$ (62, II и черт. 34). Это геометрическое место можно рассматривать, как следствие предыдущего геометрического места.

IX. Геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному $\triangle ABC$ и имеющих общее с ним основание AC, составляют две прямые, проведенные от AC на расстоянии, равном высоте BD треугольника ABC. Это геометрическое место в сущности есть г. м. III, но в изложенном виде имеет очень много приложений.

X. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна a^2, есть окружность определенного центра и радиуса.

Пусть точка M удовлетворяет равенству $AM^2+MB^2=a^2$. Построим параллелограм $AMBN$, проводя $NB \parallel AM$ и $AN \parallel MB$. Тогда по свойству диагоналей параллелограма находим: $2AM^2+$ $+2MB^2=AB^2+MN^2$ или $2a^2=AB^2+MN^2$; обозначая через b известный нам отрезок AB, найдем $MN=\sqrt{2a^2-b^2}$. Так как a и b величины постоянные, то MN, а потому и половина ее MO, есть постоянная величина и, значит, M находится на окружности, описанной из центра O радиусом OM.

Для построения искомой окружности на отрезке a опишем полуокружность и соединим произвольную точку этой окружности с концами диаметра. Пусть будут c и d катеты полученного треугольника. Из центров A и B опишем дуги радиусами c и d до встречи их в точке C. Искомый радиус равен OC.

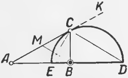
XI. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек M и N равна a^2, есть

перпендикуляр к MN в точке E, определяемой равенством $EM^2 - EN^2 = a^2$.

Легко доказывается из прямоугольных треугольников, если взять одну из искомых точек. Берем произвольный $\triangle ABC$, в котором $A = 90°$ и $AB = a$. Из центров M и N опишем дуги радиусами BC и AC до встречи их в точке D. Точка D принадлежит искомому перпендикуляру.

XII. Геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении m : n, есть окружность определенного радиуса и центра (черт. 24).

Пусть точка C имеет свойство, выраженное пропорцией $AC : CB = m : n$, причем $m > n$. Определим на AB точку E так, чтобы $AE : EB = m : n$ (17, I); проведем $CD \perp EC$ и $BM \parallel CD$. Тогда из пропорции $AC : CB = AE : EB$ выходит: $\angle ACE = \angle ECB$. В $\triangle MCB$ высота CE делит угол при вершине пополам, поэтому $MC = CB$. Из пропорций $AD : DB = AC : CM = AC : BC = m : n$ видно, что точка D есть точка постоянная и что ее легко найти (17, I). Так как $\angle ECD$ прямой, то точка C лежит (г. м. V) на окружности, диаметр которой равен ED.



Черт. 24.

Гармонические точки. Из равенства $AE : EB = AD : DB$ (черт. 24) вытекает $AD \cdot EB = AE \cdot DB$. Точки A, E, B и D, лежащие на одной прямой и удовлетворяющие такому равенству, называются гармоническими; говорят также, что отрезок AB разделен в точках E и D гармонически. Точно так же отрезок ED разделен в A и B гармонически.

Не трудно, зная три из этих точек, подыскать к ним четвертую гармоническую. Так, если известны A, E и B, то точка D находится с помощью 17, I, 2. Если же даны A, E и D, то описав на диаметре ED полуокружность, любую ее точку C соединяем с E и A и откладываем $\angle ECB$, равный $\angle ACE$. Также поступают, если даны точки B, E и D. Если же даны из трех только две точки, например, A и B, то точку E (или D) назначают произвольно. Наиболее характерное свойство гармонических точек выражается следующей теоремой:

Если прямые AB, AC, AD, AE делят гармонически какой-нибудь один отрезок, проведенный в угле BAE, то они разделят гармонически всякий отрезок, проведенный в том же угле.

Пусть первый отрезок будет $bcde$, так что $be \cdot cd = bc \cdot de$. Возьмем произвольный отрезок b_1e_1, на нем произвольную точку c_1 и найдем точку d_1, гармоническую к точкам b_1, c_1 и e_1. Опишем на b_1c_1 и c_1e_1 дуги, вмещающие углы, равные углам BAC и CAE. Эти дуги встретятся в одной точке a_1. Фигуру $b_1a_1e_1$ наложим на данную фигуру, определится точка d_1, и справедливость теоремы очевидна. Это доказательство гораздо проще обычного[1]) и обнаруживает всю силу мысли, высказанной в конце статьи о подобии фигур.

XIII. Геометрическое место точек, из которых касательные к данным двум окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная к линии центров в определенной точке.*

---

[1]) См. геометрию Давыдова, § 78.

Пусть касательные AB и AC из точки A к окружностям O и O_1 равны, R и R_1 — радиусы и $AD \perp OO_1$. Тогда из равенств $AB^2 = AO^2 - R^2$, $AC^2 = AO_1^2 - R_1^2$ находим $AO^2 - AO_1^2 = R^2 - R_1^2 =$ величине постоянной. На осн. г. м. XI находим, что все искомые точки лежат на перпендикуляре AD, где точка D определяется равенством $OD^2 - O_1D^2 = R^2 - R_1^2$. Прямая AD называется *радикальной осью* или осью одинаковых степеней данных окружностей. Когда окружности пересекаются, то радикальная ось сливается с их общей хордой. Решая задачу № 71, можно убедиться, что радикальные оси трех окружностей встречаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* этих трех окружностей. Пользуясь этим, легко определить радикальную ось двух окружностей. Именно, надо провести третью произвольную окружность, встречающую две данные окружности, и продолжить до встречи хорды пересечения; если сделать такое же построение в другой раз, то получим две точки, принадлежащие радикальной оси.

Радикальная ось имеет следующие замечательные свойства:

1. Радикальная ось двух окружностей есть геометрическое место центров окружностей, встречающих данные окружности под прямым углом.

Пусть окружность O_3 встречает данные окружности O_1 и O_2 в точках A и B под прямым углом. Тогда касательные O_3A и O_3B равны, как радиусы, и потому точка O_3 принадлежит радикальной оси окружностей O_1 и O_2.

2. Радикальная ось двух окружностей расположена ближе к центру меньшей окружности.

3. Прямая, параллельная радикальной оси двух окружностей и проходящая в таком расстоянии от одного центра, в каком радикальная ось находится от другого центра, есть геометрическое место центров окружностей, пересекающих две данные окружности пополам.

Пусть окружность O_3 встречает окружность O_1 по диаметру $AB = 2R_1$ и другую данную окружность O_2 по диаметру $CD = 2R_2$. Тогда $O_2O_3^2 = R_3^2 - R_2^2$ и $O_1O_3^2 = R_3^2 - R_1^2$, откуда $O_2O_3^2 - O_1O_3^2 = R_1^2 - R_2^2$, между тем как всякая точка X радикальной оси окружностей O_1 и O_2 должна удовлетворять равенству $O_1X^2 - O_2X^2 = R_1^2 - R_2^2$. Отсюда видно, что точка O_3 принадлежит прямой, проведенной перпендикулярно к O_1O_2 на таком расстоянии от O_1, на каком радикальная ось проходит от O_2.

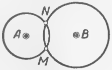
Самый легкий способ построения этого геометрического места основан на отыскании радикального центра данных и третьей произвольной окружности, встречающей две первые окружности.

XIV. Геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и пересекающих данную окружность под определенным углом, есть окружность, концентрическая данной окружности.

Если две окружности данных радиусов пересекаются под данным углом, то хорда пересечения будет иметь определенную длину,

и обратно. Поэтому, эту теорему можно выразить в такой форме:

Геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус R и пересекающих данную окружность по хорде данной длины a, есть концентрическая окружность. Построение этой окружности показано в № 72, II.

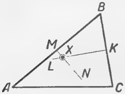


Черт. 25.

Примеры употребления метода геометрических мест:

53. *Найти точку, отстоящую от данной точки A на расстоянии, равном a, и от данной точки B на расстоянии, равном b.*

Так как искомая точка отстоит от A (черт. 25) на расстоянии, равном a, то она лежит где-то на окружности, описанной из центра A радиусом, равным a; так как в то же время расстояние искомой точки от точки B равно b, то она лежит на окружности, описанной из центра B радиусом, равным b. Искомая точка должна лежать и на той, и на другой окружности, след., она лежит в точке их пересечения. Значит, чтобы решить задачу, надо радиусами a и b описать окружности из центров A и B; искомых точек вообще получим две, M и N. Условие пересечения или касания окружностей будет условием возможности задачи: оно будет $a+b \geqslant AB$ и $b-a \leqslant AB$.

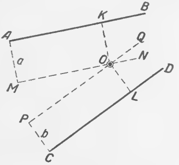


Черт. 26.

54. *Найти точку, равноотстоящую от всех трех вершин данного $\triangle ABC$* (черт. 26).

Искомая точка отстоит от точек B и C на равном расстоянии, поэтому она есть одна из точек перпендикуляра KL, восставленного из середины BC. Подобным образом искомая точка есть одна из точек перпендикуляра MN, восставленного из середины AB. Искомая точка лежит и на перпендикуляре MN, и на перпендикуляре KL, значит, в их пересечении.

Поэтому, чтобы найти точку X, из середин AB и BC восставляем перпендикуляры; в пересечении их будет искомая единственная точка. Доказательство предоставляем учащимся.

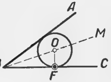


Черт. 27.

55. *Найти точку, находящуюся на расстоянии a от прямой AB и на расстоянии b от прямой CD* (черт. 27).

Если искомая точка находится на расстоянии a от AB, то она лежит где-то на прямой $MN \parallel AB$ и проведенной от AB на расстоянии a. Проводим прямую MN (15, I). Подобным образом искомая точка должна лежать на прямой $PQ \parallel CD$ и проведенной от CD

на расстоянии b. Значит, искомая точка лежит на прямой MN и на прямой PQ, а потому — в точке их пересечения. Сделав такое построение, видим, что точка O будет искомая, потому что $OK = AM = a$ и $OL = PC = b$. Очевидно, задача всегда возможна, за исключением того случая, когда данные AB и CD параллельны и расстояние между ними не равно $a \pm b$. В последних двух случаях задача становится неопределенной. Задача имеет вообще 4 решения, так как г. м. III состоит из двух прямых.

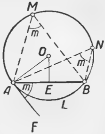


Черт. 28.

56. *Провести окружность, касательную к сторонам данного угла ABC и к одной из сторон его в данной точке F* (черт. 28).

Искомый центр лежит на биссекторе BM данного угла (12, I). Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной, то искомый центр лежит на перпендикуляре OF, восставленном к BC. Окончательно искомый центр лежит в точке пересечения BM и OF. Поэтому для решения задачи нужно провести биссектор BM угла B и восставить $FO \perp BC$; точка пересечения BM и OF есть искомая; радиус искомой окружности равен OF.

57. *На данном отрезке AB описать дугу, вмещающую данный угол m* (черт. 29).



Черт. 29.

Пусть дуга $AMNB$ описана на AB так, что всякий вписанный в нее угол AMB или ANB равен данному углу m[1]). Вопрос сводится к определению центра этой дуги. Так как центр должен одинаково отстоять от точек A и B, то он лежит, во-первых, на прямой $OE \perp AB$, восставленной из середины AB. Во-вторых, он должен лежать на перпендикуляре AO, восставленном к касательной AF, проведенной в точке A, и, следовательно, искомый центр лежит в пересечении AO и OE. Что же касается определения положения AF, то замечаем, что углы AMB и FAB измеряются половиной одной и той же дуги ALB, и потому $\angle FAB = m$, это следствие указывает, как построить AF.

Из сказанного выходит следующее решение. В середине AB восставим перпендикуляр; построим угол $FAB = m$ и восставим в точке A перпендикуляр к AF. Центр искомой дуги будет в пересечении этих перпендикуляров. Решений два, потому что угол m можно было построить в другую сторону. Если $m = 90°$, то точка O сливается с точкой E, и обе искомые дуги дают одну окружность.

58. *К данной окружности O провести из внешней точки A касательную* (черт. 30).

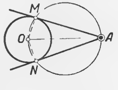
Пусть AM есть искомая касательная. Для определения точки M

---

[1]) В этом случае выражаются иногда так: „отрезок AB виден из точек M и N под углом m“.

проводим радиус OM и замечаем, что $\angle OMA$ прямой, и потому вершина M лежит на окружности, описанной на AO как на диаметре.

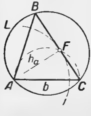
Следовательно, чтоб решить задачу, надо из середины AO радиусом, равным ее половине, очертить окружность; эта окружность пересечет данную окружность в искомых точках M и N. Действительно, прямая AM имеет общую точку M с окружностью O, и сверх того радиус, проведенный к этой точке, перпендикулярен к AM, так как углы AMO и ANO, как опирающиеся на диаметр AO, будут прямые; значит, прямые AM и AN коснутся окружности O.



Черт. 30.

59. *Построить треугольник, зная b, B и h_a* (черт. 31).

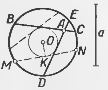
Построим сначала данное основание AC. Вершина B лежит где-то на дуге ALC, вмещающей угол B и описанной на AC. Чтобы определить, где именно она лежит, определим положение точки F — основания высоты AF. Так как $AF = h_a$, то точка F лежит где-то на дуге, описанной из центра A радиусом h_a; с другой стороны, так как $\angle AFC$ прямой, то точка F лежит на полуокружности, диаметр которой равен AC. Следовательно, F лежит в пересечении двух известных окружностей. Из этого выходит следующее решение. Отложив $AC = b$, опишем на ней дугу, вмещающую угол B (57, II); затем, начертив из центра A окружность радиусом h_a, проведем к ней из точки C касательную FC (58, II), и продолжим ее до пересечения с первой дугой в точке B. $\triangle ABC$ будет искомый. Условие возможности $h_a \leqslant b$.



Черт. 31.

60. *Через данную точку A провести к окружности O секущую, которая определила бы хорду данной длины a* (черт. 32).

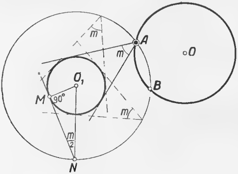
Так как середины всех равных хорд, проведенных в данной окружности, составляют концентрическую окружность, которой касаются все эти хорды, то и искомая хорда касательна к той же окружности; поэтому построим эту окружность. Для этого из произвольной точки M начертим дугу радиусом, равным a, и точку пересечения ее с окружностью соединим с M. Затем, опустим из O перпендикуляр на MN, проведем из центра O окружность радиусом OK. Этой окружности должна касаться искомая хорда, а так как она должна проходить еще через точку A, то, очевидно, нужно из точки A провести касательную к внутренней окружности O и продолжить ее в обе стороны до пересечения с внешней окружностью. Таким образом, имеем два решения. Отрезок a должен быть не больше диаметра круга O.



Черт. 32.

61. *На данной окружности O найти точку, из которой другая данная окружность O_1 видна под данным углом m* (черт. 33).

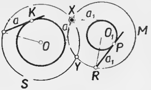
Строим геометрическое место искомой точки. Для этого, взяв произвольный радиус O_1M, проведем в точке M касательную и из точки O_1 проведем прямую, составляющую с радиусом O_1M угол, равный 90° без половины угла m. Точка пересечения этой прямой с касательной принадлежит искомой окружности, которую мы проведем радиусом O_1N. Искомая точка лежит на окружности O; след., она лежит в точке пересечения этих окружностей. Вообще искомых точек будет две. Условие возможности задачи сливается с условием пересечения или касания окружностей NBA и O [1]). В случае их касания искомая точка будет одна.



Черт. 33.

62. *Найти точку, из которой касательные к двум данным окружностям O и O_1 равняются данным отрезкам a и a_1* (черт. 34).

Так как все точки, из которых касательные к данной окружности O равны a, лежат на концентрической окружности, то там же лежит и искомая точка. Чтобы построить эту окружность, в произвольной точке K проводим касательную к окружности O и откладываем на ней $LK = a$; затем радиусом, равным OL, чертим окружность LS. Все точки, из которых касательные к окружности O_1 равны a_1, лежат тоже на концентрической окружности, которая найдется следующим образом: в произвольной точке P проводим касательную к окружности O_1 и откладываем на ней $PR = a_1$; затем из центра O_1 чертим окружность радиусом, равным O_1R. Искомая точка должна лежать и на окружности LS и на окружности MR; значит, она лежит в их пересечении.



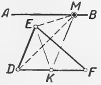
Черт. 34.

Таким образом, находим две искомые точки X и Y. Радиус окружности LS равен $\sqrt{a^2 + r^2}$, а окружности MR равен $\sqrt{r^2_1 + a^2_1}$, где r и r_1 суть радиусы данных кругов. Условие возможности задачи сливается с условием пересечения или касания окружностей LS и MR; оно выражается так: $\sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{a^2_1 + r^2_1} \geqslant O_1O$ и $\sqrt{a^2 + r^2} - \sqrt{a^2_1 + r^2_1} \leqslant O_1O$. В случае касания окружностей LS и MR получается одно решение, и искомая точка находится в точке касания.

[1]) Оно будет $AO + O_1M \cdot \operatorname{cosec}\frac{m}{2} \geqslant OO_1$ и $AO - O_1M \cdot \operatorname{cosec}\frac{m}{2} \leqslant OO_1$.

63. *На прямой AB найти точку M, соединивши которую с двумя вершинами данного $\triangle DEF$, образуем $\triangle MDE$, равновеликий половине $\triangle DEF$* (черт. 35).

Пусть искомая точка M найдена, и $\triangle EMD = \frac{1}{2} \triangle EDF$. Введем в чертеж половину $\triangle EDF$. Для этого разделим DF пополам и соединим точку деления K с точкой E; тогда $\triangle DEK = \frac{1}{2} \triangle DEF$. Замечаем, что $\triangle\triangle DEK$ и DEM, имея общее основание ED, — равновелики; стало быть, вершины M и K лежат на прямой, параллельной основанию DE и проходящей через известную нам точку K. Итак, искомая точка M лежит на прямой $MK \parallel DE$, да еще должна лежать на прямой AB; значит, она должна лежать в точке пересечения AB и MK.

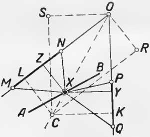


Черт. 35.

Вследствие этого для решения задачи нужно разделить DF пополам и провести из ее середины прямую, параллельную DE; эта параллель пересечет прямую AB в искомой точке. Вообще два решения, потому что г. м. IX состоит из двух прямых.

64. *Даны два отрезка MN и PQ; на данной прямой AB найти такую точку X, чтобы треугольники MXN и PXQ были равновелики.*

Пусть точка X (черт. 36) найдена так, что она лежит на прямой AB, и $\triangle MXN$ равновелик $\triangle PXQ$. Если XZ и XY суть высоты этих треугольников, то $XZ : XY = PQ : MN$ (91, I). Отсюда видно, что расстояния искомой точки X от MN и PQ находятся в известном отношении. Поэтому искомая точка X находится, с одной стороны, на геометрическом месте точек, расстояния которых до прямых MN и PQ находятся в данном отношении, с другой стороны — на прямой AB. Для построения искомого геометрического места восставим перпендикуляры OS и OR к PQ и MN и отложим $OS = MN$ и $OR = PQ$; затем из точек S и R проведем прямые, параллельные PQ и MN, до встречи в точке C; так как $CL : CK = OR : OS$, то искомая прямая будет CO. Искомая же точка находится в пересечении прямых OC и AB. Сделав указанное построение и опустив перпендикуляры XY и XZ, из подобия треугольников найдем $\frac{XY}{CK} = \frac{OX}{OC}$ и $\frac{XZ}{CL} = \frac{OX}{OC}$, откуда $\frac{XY}{CK} = \frac{XZ}{CL}$; заменив $CK = OS = MN$ и $CL = OR = PQ$, взяв произведения крайних и средних последней пропорции и разделив оба произведения на два, получаем равенство площадей $\triangle\triangle MXN$ и PXQ.

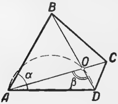


Черт. 36.

65. *Построить четырехугольник по двум смежным сторонам, углу между ними, по данной диагонали, выходящей из вершины данного угла и углу между диагоналями* (черт. 37).

Пусть искомый четырехугольник будет $ABCD$, так что $\angle\angle BAD$ и AOD равны данным α и β, диагональ $AC=b$, сторона $AB=c$ и $AD=d$. Построим непосредственно ту часть искомой фигуры, которую сумеем. Эта часть фигуры есть $\triangle BAD$.

Построив $\triangle ABD$ (20, I), замечаем, что задача сводится на определение точки O, потому что, если бы мы знали ее положение, то, соединив ее с A и отложив $AC=b$, нашли бы весь четырехугольник. Так как $\angle AOD$ равен β, то точка O, с одной стороны, лежит на дуге AOD, описанной на AD и вмещающей угол β. С другой стороны, точка O лежит на прямой BD. Отсюда видно, что O лежит на пересечении дуги AOD с прямой BD; вместе с тем ясно следующее решение задачи.

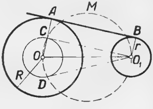


Черт. 37.

Построив $\triangle ABD$, в котором $AB=c$, $AD=d$ и $\angle BAD=\alpha$, на стороне AD опишем дугу, вмещающую угол β (57, II); точку пересечения этой дуги с прямой BD соединим с точкой A и на продолжении AO отложим часть $AC=b$; соединив точки C, B и D, получим искомый четырехугольник $ABCD$.

66*. *К двум окружностям O и O_1 провести общую касательную.*

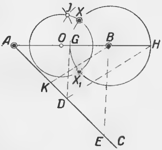
Если AB (черт. 38) есть искомая касательная, то достаточно определить направление ее, потому что, если бы мы знали, какой прямой параллельна AB, задачу привели бы к 5, II. Чтобы определить направление AB, проведем $O_1C \parallel AB$, опустим $OC \perp O_1C$ и определим положение точки C. Она лежит на окружности, описанной на диаметре OO_1, так как $\angle OCO_1$ прямой. Продолжая перпендикуляр OC и проводя радиус $O_1B \parallel OC$, видим, что $OC=AO-AC=R-r$, так как $AC \parallel O_1B$. Если же отрезок OC равен $R-r$, то точка C лежит на окружности, описанной из центра O радиусом равным $R-r$; след., точка C лежит в пересечении окружностей OMO_1 и CD. Определив таким образом точку C, ведем к одной из данных окружностей касательную AB, параллельную O_1C (5, II). Эта касательная и будет искомая. Действительно, сделаем найденное построение; пусть AB касается окружности O_1 и встречает продолжение радиуса OC в точке A. Тогда, так как $AC \parallel O_1B$ и $OC=R-r$, то $AO=OC+AC=OC+O_1B=R-r+$ $+r=R$. Это значит, что точка A приходится на окружности O; так как $\angle OAB=\angle OCO_1=90°$, то прямая AB, имея общую точку с окружностью O, перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку, и потому AB касается окружности O; но AB проведена касательной к окружности O_1, след., она касается обеих окружностей. Задача имеет два решения; другая касательная параллельна прямой O_1D. Это могли бы заметить и раньше, потому что C есть

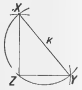


Черт. 38.

точка пересечения двух окружностей, причем центр одной лежит на другой окружности; таких точек две, а потому и решений два. Если касание требуется внутреннее, то радиус окружности CD будет равен $R+r$.

67. *Даны точки A и B. Определить точку X так, чтобы $AX:BX$ и AX^2+BX^2 имели данные значения $m:n$ и k^2, где m, n и k суть данные отрезки* (черт. 39).

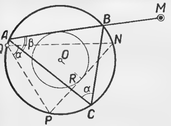




Черт. 39.

Отбросим второе требование. Тогда точка X будет лежать на г. м. XII, которое при $m>n$, получим след. образом. На произвольной прямой AC отложим $AD=m$, $AK=n$, $DE=n$ и проведем $DG \parallel BE$ и $DH \parallel KB$. Окружность, описанная на диаметре GH, будет искомая.

Отбрасывая первое требование, найдем, что точка X должна лежать на окружности (г. м. X), которая получится след. образом. Опишем полуокружность на диаметре $XY=k$ и ее приблизительную середину Z соединим с X и Y. Из центров A и B опишем дуги радиусами XZ и ZY до встречи в J. Разделим AB пополам в O и радиусом OJ проведем окружность.



Черт. 40.

Обе окружности пересекутся в искомых точках X и X_1. Два, одно или ни одного решения.

68. *В данную окружность O вписать треугольник, два угла которого равны α и β и одна сторона которого проходит через данную точку M* (черт. 40).

Пусть $\triangle ABC$ — искомый. Пытаясь определить величину стороны AB, замечаем, что она есть одна из хорд, соответствующих вписанному углу α; а так как хорды, соответствующие равным вписанным углам, равны, то, построив при какой-нибудь точке Q окружности вписанный угол α, найдем, что хорда NP равна одной из искомых сторон; остается провести через точку M хорду равную NP.

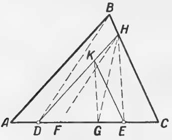
Так как середины равных хорд составляют концентрическую окружность (г. м. VI), к которой все равные хорды касаются, то надо, опустив $OR \perp NP$, из центра O провести радиусом OR окружность; затем к этой окружности из точки M надо провести касательную; если эта касательная есть MA, то BA есть сторона

искомого треугольника. Построив при точке A на стороне BA угол β, найдем весь треугольник.

Сделав указанное построение, получим искомый треугольник по следующим причинам: $AB = NP$, след., дуги AB и NP равны, а потому $\angle ACB = \angle NQP = \alpha$ по построению; $\angle BAC = \beta$ по построению, сверх того весь $\triangle ABC$ вписан в окружность O и сторона AB проходит через точку M. Все условия вопроса удовлетворены. Задача вообще имеет два решения, так как из точки M можно провести к окружности R две касательные. Задача всегда возможна, если только точка M не приходится внутри окружности радиуса OR; выражение $OM \geqslant OR$ будет условием возможности задачи.

69. *Данный $\triangle$ ABC разделить на три равновеликие части прямыми, проведенными из точек D и E, данных на основании AC.*

Пусть $\triangle$ ABC разделен прямыми DH и EK на три части $ABHD$, DKE и $KHCE$, так что каждая из них есть треть $\triangle$ ABC (черт. 41).



Черт. 41.

Введем в чертеж треугольник, площадь которого равна трети $\triangle$ ABC. Для этого делим основание на три равные части, и если $AF = \frac{AC}{3}$, то $\triangle ABF = \frac{\triangle ABC}{3}$[1]). Сравнивая равновеликие фигуры $ABHD$ и ABF, замечаем, что у них есть общая часть ABD; след., $\triangle$ DBF равновелик $\triangle$ BDH. Так как эти равновеликие треугольники имеют общее основание, то вершины их лежат на прямой, параллельной основанию (г. м. IX); значит, прямая $FH \parallel DB$. Таким образом, становится известным положение точки H, и понятно, как надо вести искомую прямую, проходящую через точку D. Осталось найти, как провести прямую из точки E, чтобы фигуру DHC разделить пополам. Введем в чертеж фигуру, равновеликую половине треугольника DHC. Для этого в точке G делим пополам DC и G соединяем с H. Фигуры GHC и $KHCE$ — равновелики; но так как они имеют общую часть EHC, то $\triangle$ KHE равновелик $\triangle$ GHE, и потому $KG \parallel HE$. Проведя KG, найдем точку K и прямую KE.

Таким образом доходим до следующего решения. Отложим $AF (= AC:3)$; соединив точки D и B, из F проведем параллель DB, которая встретит BC в точке H. Первая из искомых прямых будет DH. Далее, разделив DC в точке G пополам и соединив H с E, из точки G проведем параллель HE, которая встретит DH в точке K. Другая искомая прямая будет KE. Докажем это. Фигуры ABF и $ABHD$ имеют общую часть ABD; остальные их части, DBF и DBH, равновелики, так как имеют общее основание BD и одинаковые

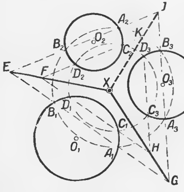
[1]) Линия BF на чертеже не проведена.

высоты. Значит, $ABHD = \triangle ABF = \frac{1}{3} \triangle ABC$; след., $\triangle CHD = \frac{2}{3} \triangle ABC$, а $\triangle GHC = \frac{1}{3} \triangle ABC$. Затем фигуры $KHCE$ и GHC имеют общую часть EHC, а остальные их части $\triangle EKH$ и $\triangle GHE$, имея общее основание EH и общую высоту по построению, — равновелики. Поэтому $KHCE = \triangle GHC = \frac{1}{3} \triangle ABC$. Задача всегда возможна.

70. *Построить треугольник с данным основанием и углом при вершине так, чтобы он был равновелик сумме данных двух треугольников DEF и MNP.*

Прежде всего надо сложить данные треугольники так, чтобы сумма их представилась в виде треугольника. С этой целью надо $\triangle MNP$ превратить в равновеликий ему $\triangle MN_1P_1$ так, чтобы высота N_1Q была равна высоте EH: затем надо применить 194, 2, II и построить $\triangle M_2N_1P_2$, равновеликий $\triangle MN_1P_1$, так, чтобы $M_2N_1 = DE$, $\angle N_1M_2P_2 = 180° - \angle EDF$, $M_2P_2 = MP_1$, и высота из N_1 осталась та же. Тогда треугольники DEF и $M_2N_1P_2$ можно сложить в один $\triangle P_2EF$. После этого получится сумма данных треугольников в виде треугольника, и останется применить задачу 194, 1, II.

71. *Найти точку, касательные из которой к трем данным окружностям равны между собой* (черт. 42).



Черт. 42.

Оставим в стороне окружность O_1; тогда искомая точка по г. м. XIII должна лежать на радикальной оси окружностей O_3 и O_2. Таким же образом искомая точка находится на радикальной оси окружностей O_1 и O_2. Окончательно точка X должна быть в пересечении двух радикальных осей. Поэтому надо построить эти оси. Проводим две произвольные (легче всего концентрические) окружности так, чтобы они пересекали все три данные окружности. Три пары хорд пересечения продолжим до встречи. Прямые EF и GH встретятся в искомой точке X.

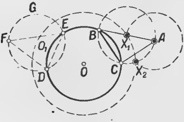
Можно доказать, что точка X есть единственная точка. Докажем для этого, что прямая KJ пройдет через X. В самом деле, если бы точка X не лежала на прямой KJ, то тогда было бы возможно отыскать такую точку, касательные из которой к окружностям O_2 и O_3 равны, но так, что эта точка не лежит на радикальной оси тех же окружностей. В таком случае г. м. XIII было бы неверно, а потому точка X лежит на прямой KJ.

Задача становится невозможной, когда радикальные оси будут параллельными и когда одной радикальной оси не существует. Это

будет, во-первых, когда все три центра лежат на одной прямой, и окружности или вовсе не встречаются, или имеют более одной общей точки; во-вторых, когда две или три окружности будут концентрические. Когда радикальные оси совпадают, то задача становится неопределенной; это случится тогда, когда все три окружности встречаются в двух точках или касаются друг друга в одной точке. В этом случае каждая точка общей касательной или хорды пересечения удовлетворяет требованиям вопроса.

72. *Даны окружность и точка A. Провести в окружности хорду данной длины так, чтобы она была видна под данным углом φ из точки A* (черт. 43).

Реш. Пусть хорда BC будет искомая. Отложим хорду $DE = BC$ и опишем на ней дугу DGE, вмещающую угол φ (57, II). Теперь задачу можно выразить следующим образом: „через точку A провести окружность данным радиусом DO_1 так, чтобы она встретила данную окружность O по хорде данной величины DE“. Искомый центр должен лежать, с одной стороны, на концентрической окружности $O_1X_1X_2$ (г. м. XIV), с другой стороны, он лежит на окружности, описанной из центра A радиусом, равным DO_1. После этого решение очевидно. Получим два решения. Искомые центры суть X_1 и X_2.



Черт. 43.

Рассматривая треугольники ODO_1, OEO_1, OBX_1 и OCX_1 находим, что $BC = DE$, и потому $\angle BAC = \angle DFE = \angle DGE = \varphi$. Условие возможности будет $OO_1 + DO_1 \geqslant AO$ и $OO_1 - DO_1 \leqslant AO$. Одно или два решения.

Соответственно указанным геометрическим местам решаются следующие задачи.

I—IV. 73. Даны две параллельные прямые. Провести третью параллельную прямую так, чтобы данный $\triangle ABC$ можно было поместить вершинами на всех трех параллелях.

74. Даны две параллельные прямые. Провести две прямые, параллельные данным, так, чтобы данную фигуру $ABCD$ можно было поместить вершинами на всех четырех параллелях.

74. Даны две концентрические окружности. Начертить еще две концентрические окружности так, чтобы данный четырехугольник можно было поместить вершинами на всех окружностях.

75. Построить четырехугольник, зная три стороны и радиус описанной окружности.

76. 1) Построить треугольник по данным a, b, A.

2) Построить параллелограм по данным стороне, углу и диагонали.

77. Построить треугольник, зная расстояния центра вписанной окружности от концов основания и основание (58, II).

77. Построить четырехугольник, зная AB, BC и расстояния вершин A и B от центра вписанной окружности.

78. Построить ромб по данным высоте и диагонали.

Построить четырехугольник $ABCD$, зная:

79. A, AB, BC, CD, AD.

80. AB, BC, BD, AD, AC.

81. AB, BC, CD, AC и BD.

82*. Даны две концентрические окружности и точка. Через эту точку провести окружность, касательную к данным окружностям.

83. Провести радиусом R окружность, проходящую через две данные точки A и B.

84. Данным радиусом R провести окружность, проходящую через данную точку M и касательную к данной окружности O.

85. Провести радиусом R окружность, касательную к данной окружности O, если центр искомой окружности должен лежать или на другой окружности C, или на данной прямой MN.

86*. Данным радиусом R провести окружность, касательную к двум данным окружностям O_1 и O_2.

87. Провести радиусом R окружность, касательную к данной окружности в данной на ней точке.

88*. Даны две концентрические окружности и еще окружность. Провести окружность, касательную ко всем трем окружностям.

89. На данной прямой найти точку, равноотстоящую от двух данных точек.

90. Построить ромб так, чтобы две противоположные его вершины были в двух данных точках, а третья на данной окружности.

91. Через данную точку A провести данным радиусом окружность так, чтобы касательная к ней из данной точки B была данной длины (20, I, г. м. I).

92. Через данную точку провести данным радиусом окружность так, чтобы она из другой данной точки была видна под данным углом (21, I, г. м. I).

93. Провести окружность, касательную к двум данным параллелям и к третьей прямой, пересекающей параллели.

94. Построить треугольник по данным A, b и h_b.

95. Построить треугольник по данным a, b и h_a.

96*. Построить треугольник по данным c, h_b и m_a (40, I).

96. Из данного центра A описать окружность, встречающую данные две параллели по отрезку XY данной длины (40, I).

97. Построить параллелограм по данным двум сторонам и высоте.

98. Даны две концентрические окружности и прямая. Провести окружность, касательную к данным окружностям и прямой.

99. Построить треугольник по данным A, b_A и h_c.

100. Построить треугольник, зная A, a и h_b.

101. Найти точку, находящуюся на расстоянии, равном a, от данной прямой MN и на расстоянии b от данной точки A.

102. Найти точку, равноотстоящую от данных двух точек и находящуюся на известном расстоянии от данной прямой.

103. Найти на прямой AB точку, равноотстоящую от двух пересекающихся прямых MN и PQ.

104. Найти точку, удаленную от данной прямой на расстоянии, равном a, и равноудаленную от двух данных прямых.

105. Радиусом R провести окружность, касательную к данной прямой AB, если искомый центр находится в расстоянии a от данной точки M.

106. Через данные точки A и B провести окружность так, чтобы вписанный угол, опирающийся на AB, был вдвое более вписанного угла, опирающегося на хорду, которая имеет определенную длину.

Реш. Надо отложить хорду BC определенной длины; тогда $AC = BC$.

107. На данной окружности найти точку, расстояния которой до сторон данного угла были бы в данном отношении $m : n$.

108. Данным радиусом провести окружность, отсекающую от сторон данного угла равные хорды так, чтобы центр лежал на данной прямой.

109. Построить $\triangle ABC$, зная b_c, h_a и h_b (40 и 91, I).

110. Провести окружность, касательную к стороне BC треугольника ABC в данной на ней точке M, так, чтобы один диаметр лежал на стороне AB.

111*. Из данного центра описать окружность так, чтобы в пересечении ее со сторонами данного угла получилась хорда, параллельная данной прямой (г. м. IV).

112. Провести окружность, касательную к трем данным прямым (4 случая).

113. Построить четырехугольник $ABCD$, зная A, AC и $BC : CD$, так, чтобы углы B и D были прямые (или данной величины).

113. Построить четырехугольник $ABCD$, зная AB, AD, A и радиус вписанной окружности.

114. В известном направлении провести в $\angle ABC$ отрезок так, чтобы он делился данной окружностью пополам.

115. Внутри треугольника ABC найти точку D так, чтобы треугольники ADB, CDB и ADC были равновелики (64, II).

116*. Найти геометрическое место центров окружностей, пересекающих две прямые под данными углами.

117. Провести окружность, встречающую три данные прямые под данными углами (116, II).

V—IX. 118. На данной прямой или окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под данным углом.

119. Найти точку, из которой два данных отрезка видны под данными углами.

120*. В $\triangle ABC$ найти точки X и Y (точки Брокара) так, чтобы $\angle\angle\ XAB$, XBC и XCA, точно так же, как $\angle\angle\ YAC$, YCB и YBA, были равны между собой.

121. Построить треугольник наибольшей площади, зная A и a.

122*. В данной окружности провести хорду, которая была бы видна из данных трех точек под равными углами.

123*. В данную окружность вписать прямоугольник так, чтобы две его стороны проходили через данные две точки.

124. Построить треугольник, зная a, A и m_a.

124. Построить параллелограм, зная стороны и угол между диагоналями.

125. Построить треугольник по основанию и противолежащему углу, если известна точка на основании, через которую проходит биссектор угла при вершине.

126*. Из данного центра описать окружность, пересекающую данную окружность под данным углом.

127. Даны две точки и две параллели. Через одну данную точку провести секущую так, чтобы отрезок ее между параллелями делился в данном отношении перпендикуляром из другой данной точки (40, I).

128. Из данного центра описать окружность так, чтобы касательная к ней из данной точки имела данную длину.

129*. Через точку P в круге O провести хорду, которая в пересечении с данной хордой AB делится пополам.

130. Через точку B, данную внутри окружности O, провести хорду, вдвое меньшую своего расстояния от центра (55, I).

131. Построить треугольник или параллелограм по данным основанию и двум высотам (58, II).

132*. Дана точка внутри окружности. Провести через нее хорду так, чтобы разность ее отрезков, определенных данной точкой, была данная.

133. Построить прямоугольный треугольник, зная гипотенузу и медиану одного катета.

134. Начертить ромб, две смежных вершины которого находятся в двух данных точках, а пересечение диагоналей — на данной окружности.

135. Даны точки A, B и C. Начертить прямоугольный треугольник с данным катетом так, чтобы каждая сторона проходила через одну из данных точек и чтобы отрезки BA и AC были видны из вершины прямого угла под равными углами.

136*. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы сумма полученных хорд равнялась данному отрезку a. Найти наибольшее значение, которое может иметь a.

137. В окружность вписать прямоугольный треугольник, зная острый угол и точку, через которую проходит один катет.

138. Провести прямую, которая от данных точек A и B отстоит на расстояниях, равных данным отрезкам a и b.

Построить четырехугольник ABCD, зная:

139. AC и $\angle\angle\ ABC$, ADC, BAC и DAC.

140. AB, AD, AC и $\angle\angle\ BAD$, BCD.

141. AB, BC, CD, AC и $\angle\ ADC$.

142. AB, BC, AC и $\angle\angle\ ADB$, BDC.

143. AB, BD, $\angle\ (AC, BD)$, AD и BC.

144. Построить треугольник, зная B, h_a и m_a.

145. Построить параллелограм, зная основание, высоту и угол между диагоналями.

146. Построить треугольник, зная A, h_a и m_b.

Реш. Можно построить прямоугольный треугольник по гипотенузе m_b и катету, равному половине h_a.

147. Построить треугольник, зная a, $\angle (m_a, b)$ и $\angle (m_a, c)$.

148. Описать данным радиусом окружность, проходящую через точку A и отсекающую от данной прямой хорду, равную данной длине (63, I).

148. Из данной точки провести две прямые, которые составляют между собою данный угол и отсекают от данной прямой отрезок данной длины.

149. Между данными двумя параллельными прямыми провести отрезок данной длины так, чтобы он был виден под данным углом из данной точки (64, I).

150*. На окружности O даны точки A, B и C. Найти такую точку P, чтобы прямые AP, BP и CP, пересекая окружность в точках D, E и F, отделяли хорды DE и EF данной длины.

151. Даны точки A и B и окружность. Провести через A и B две секущие, определяющие в окружности равные и пересекающиеся под данным углом хорды (56, I).

152*. Данным радиусом описать окружность, касательную к данной прямой так, чтобы касательные к этой окружности из двух данных точек A и B были параллельны.

153. Дана окружность и в ней две хорды, AB и CD. На хорде CD найти точку E так, чтобы прямые AE и EB определяли на окружности новую хорду FG данной длины.

154. Начертить ромб, две стороны которого находятся на данных двух параллельных AB и CD, а другие две стороны проходят через данные точки E и F.

Реш. На EF опишем полуокружность и проведем хорду FG, равную расстоянию AB и CD; EG — искомая.

155. Начертить параллелограм с данным отношением сторон так, чтобы две стороны лежали на двух параллельных данных прямых, а остальные проходили бы через две данные точки (91, I).

156. Начертить квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки A, B, C и D.

Реш. Описав на AB и CD окружности, найдем диагональ квадрата, потому что она проходит через середины полуокружностей.

156. Начертить прямоугольник с данным отношением сторон так, чтобы они проходили соответственно через 4 данные точки (69, I или 84, I).

157. Даны две окружности и внешняя к ним касательная. Найти на ней точку так, чтобы из нее обе окружности были видны под углами, сумма которых равна данному углу (57, II).

Построить треугольник, зная:

158. A, h_a, $b+c-a$ (58, I и 66, II). 158. A, $2p$, r.

159. A, h_a, $2p$ (58, I). 159. A, r, ρ_a.

160. a, $b+c$, r. *Реш.* Построим сначала $b+c-a$ (58, I).

160. a, $b-c$, r.

161. A, h_a, ρ_a (66, II). 161. A, h_a, ρ_b.

162. Даны три параллели и на них по точке A, B и C. Определить на них еще по точке X, Y и Z так, чтобы $AX:BY$, $BY:CZ$ и $\angle XYZ$ имели данные значения.

163. Данным радиусом провести окружность, отсекающую от сторон данного угла хорды данной длины (63, I).

164. Начертить параллелограм, две смежные вершины которого были бы в данных точках, а две другие на данной окружности.

165. В данной окружности провести хорду данной длины так, чтобы расстояния ее до двух данных точек были в данном отношении.

166. Даны две окружности O и O_1; провести секущую так, чтобы части ее внутри окружностей равнялись данным отрезкам (66, II).

167. Провести к данной окружности касательную так, чтобы отрезок ее между двумя данными концентрическими окружностями имел данную длину.

168*. В данную окружность вписать треугольник с данным углом так, чтобы две его стороны проходили через две данные точки.

169. Даны окружность и прямая; провести новую прямую, встречающую окружность в A и B, а прямую в C так, что отрезки AB и BC имеют данную длину.

170. Через две точки, данные на окружности, провести две параллельные хорды так, чтобы сумма их равнялась данной длине.

171. Найти точку, из которой две данные окружности видны под данными углами.

172. Провести окружность, пересекающую три данные равные окружности по хордам данной одинаковой длины.

173. Построить прямоугольный треугольник, зная катет и проекцию другого катета на гипотенузу.

174. Около данной окружности описать треугольник с данными углами так, чтобы одна сторона проходила через данную точку (58, II и 5, II).

174. Около данной окружности описать треугольник, вершина которого находилась бы на данной прямой, так, чтобы угол и сторона при этой вершине были данные.

175. Около данной окружности описать четырехугольник с данными углами.

175. Около данной окружности описать четырехугольник так, чтобы две смежные стороны равнялись данным отрезкам a и b, а угол, прилежащий к стороне a, равнялся данному углу m (2 случая).

176. На данной окружности найти точку, касательная из которой к другой данной окружности равняется данному отрезку.

177. Найти точку, из которой данная окружность видна под данным углом и касательная из которой к другой данной окружности равняется данному отрезку.

178. Поместить две окружности на таком расстоянии, чтобы две внутренние к ним касательные пересеклись под данным углом.

178. Поместить две данные окружности на таком расстоянии, чтобы внутренняя общая к ним касательная в пересечении с линией центров делилась на части, соответственно равные данным отрезкам a и b.

179*. Найти точку, секущие из которой к данным окружностям O и O_1, будучи данной длины, отсекают от окружностей дуги, вмещающие данные углы α и β.

180. В данную окружность вписать пятиугольник, четыре стороны которого параллельны данным четырем прямым, пятая же сторона проходит через данную точку.

181. Через данную точку A провести прямую, отрезок которой между двумя данными концентрическими окружностями виден из центра под данным углом. *Реш.* Сначала построим искомый отрезок где-нибудь и продолжим его (г. м. VI).

182. В данной окружности провести хорду данной длины так, чтобы она разделилась пополам или в данном отношении данной прямой. *Реш.* Искомая точка лежит на данной прямой и на некоторой окружности (г. м. VI).

183. Даны точки A и B и окружность; провести секущие AXZ и BYZ так, чтобы $AX=XZ$ и $BY=YZ$ (X и Y на окружности, точка Z может занять два положения).

184. На окружности даны две точки A и B. Через третью данную точку C провести секущую, встречающую окружность в точках E и D так, что прямые AE и BD встречаются под данным углом (г. м. V и VI).

185*. В данной окружности провести хорду определенной длины так, чтобы сумма ее расстояний до данных двух точек была данная (66, II).

186. В данную окружность вписать треугольник с данными основанием и медианой другой стороны так, чтобы третья сторона имела данное направление.

Реш. Построим искомую фигуру в произвольном положении (г. м. VI), а затем приведем ее в искомое положение.

187. Даны две пересекающиеся окружности. Провести в каждой окружности по хорде так, чтобы каждая хорда имела данную длину и чтобы в точке встречи каждая хорда делилась в данном отношении (182, II).

188. 1) Построить геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному прямоугольнику и имеющих с ним общее основание.

2) Данный параллелограм превратить в равновеликий треугольник с тем же основанием и с данной медианой.

189. Данный треугольник превратить в равновеликий ему треугольник с тем же основанием, но с данным углом при вершине.

190. Указать общий способ превращения многоугольника в равновеликий ему треугольник так, чтобы пара их сторон лежала на одной прямой.

191*. Данный четырехугольник превратить в равновеликий ему параллелограм с данной диагональю.

192. Четырехугольник $ABCD$ превратить в равновеликую ему трапецию с основанием AB так, чтобы точка C пришлась в вершине трапеции.

193*. 1) Данный треугольник превратить в равновеликий ему треугольник с данным основанием и общим углом при основании, причем оба основания должны лежать на одной прямой.

2) Найти геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному и имеющих данное основание.

194. Построить треугольник по данным основанию и противолежащему углу так, чтобы он был равновелик данному $\triangle ABC$.

194. Построить треугольник по данным основанию и другой стороне так, чтобы он был равновелик данному $\triangle ABC$.

195. Четырехугольник $ABCD$ превратить в равновеликий ему параллелограм с основанием AD.

196. 1) Данный $\triangle ABC$ превратить в равновеликий ему треугольник так, чтобы основание его лежало на AC, и чтобы его высота была данной длины, и угол при основании был общий.

2) Определить основание треугольников, имеющих высоту h и равновеликих данному $\triangle ABC$.

197. Данный треугольник превратить в равновеликий ему прямоугольник, имеющий данную диагональ.

198. Найти точку, соединяя которую с вершинами данного треугольника, разделим его площадь на части, находящиеся в данном отношении.

199*. Построить $\triangle ABC$, равновеликий разности двух данных треугольников, так, чтобы h_a и m_a были данной длины.

200. Разделить треугольник на 3 или n равновеликих частей прямыми, проведенными из точки, данной на основании (194, II).

201. Данный параллелограм превратить в равновеликий ему параллелограм с данным основанием и углом между диагоналями.

202. Данный параллелограм превратить в равновеликий ему ромб, имеющий данную высоту.

203. Площадь данного многоугольника разделить на n равновеликих частей прямыми, проведенными из одной вершины (190 и 194, II).

204. Пятиугольник разделить на три равновеликие части прямыми, проведенными из точки, данной на его стороне (190 и 200, II).

205. Данный четырехугольник разделить на три равновеликие части прямыми, проведенными из точки, данной внутри его площади (190 и 196, II).

206*. Трапецию разделить на 5 равновеликих частей прямыми, параллельными данной прямой, пересекающейся с параллельными сторонами.

207. Пятиугольник $ABCDE$ превратить в равновеликий ему треугольник, вершина которого лежит на стороне CD в данной точке M, а основание параллельно CD и проходит через точку A.

208. Начертить четырехугольник данной площади, зная его диагональ, противоположные ей углы и отношение расстояний этой диагонали до противоположных вершин. *Реш.* Рассматривая четырехугольник, как сумму двух треугольников, можно определить сумму расстояний, отношение которых дано (194 и 70, II).

209. Начертить параллелограм с данной диагональю и данным противолежащим ей углом так, чтобы он был равновелик сумме или разности данных треугольников.

210. Начертить равнобедренный с данной боковой стороной (или с данным углом) треугольник, равновеликий треугольнику, у которого известны произведение двух сторон k^2 и угол между этими сторонами. *Реш.* На стороне данного угла отложим отрезки, равные k, и применим 194, II или 188, II.

X, XI и XII. *Построить треугольник, зная:*

211. a, h_a и b^2+c^2. **212.** a, h_a, b^2-c^2. **213.** a, A, b^2+c^2. **214.** a, m_a и b^2-c^2. **215.** R, A, b^2+c^2.

216. В данную окружность вписать треугольник, зная угол, разность квадратов сторон, его образующих, и точку, через которую проходит одна из медиан. *Реш.* Последнее условие надо на время оставить.

217. На данной прямой найти точку, обладающую следующим свойством: сумма (или разность) квадратов касательных, проведенных из нее к двум данным окружностям, равняется k^2.

218*. На прямой даны точки A, B и C. Определить на данной окружности точку X так, чтобы $\angle AXC = 2 \angle AXB$.

219. Начертить окружность, касательные к которой из данных точек A, B и C имеют данные значения (г. м. XI).

220. Найти точку, из которой касательные к данным двум окружностям O и O_1 равны между собой, причем окружность O видна под данным углом из искомой точки (г. м. XI и VII).

Построить треугольник, зная:

221. a, h_a, $b:c$. **222.** a, h_a, $h_b:h_c$. **223.** a, b_A и $b:c$. **224.** $BD=b_B$, AD и DC. **225.** h_b, AD и DC, где $BD=b_B$.

226*. Даны точки A, B и C. Провести через A окружность так, чтобы точки B и C были серединами хорд этой окружности, причем каждая хорда была бы определенной длины (г. м. XI).

227. Даны три точки A, B и C. Провести окружность через A и B так, чтобы точка C была серединой хорды этой окружности, причем эта хорда была бы данной длины (г. м. XI и II).

228. Даны три точки A, B и C. Провести окружность так, чтобы точки A, B и C были серединами трех хорд этой окружности, причем каждая хорда должна быть определенной длины (г. м. XI).

229. Через две данные точки провести окружность, делящуюся пополам данной окружностью.

Реш. Сумма квадратов расстояний искомой точки от центра и середины данного отрезка известна (г. м. X и II).

230. Через данную точку провести окружность, делящуюся пополам двумя данными окружностями (229, II).

231. Даны точки A, B и C. Провести через A окружность так, чтобы касательные к ней из точек B и C были данной длины (г. м. XI).

231. Провести окружность так, чтобы касательные к ней из данных трех точек были данной длины.

232*. Провести окружность, которая делилась бы пополам тремя данными окружностями.

233. Через две данные точки провести окружность, пересекающую пополам данную окружность (г. м. XI).

234. Провести окружность, делящую данную окружность пополам и касательную к данной прямой в данной точке (г. м. XI).

235. Провести окружность, делящую данную окружность пополам так, чтобы касательные к ней из данных двух точек имели данную длину (г. м. XI).

236. Описать окружность через данную точку так, чтобы она делилась пополам данной окружностью O и встретила другую окружность O_1 под прямым углом (г. м. X).

237. Даны точки A, B и C. Начертить через A окружность, касательную к AB так, чтобы C оказалась серединой хорды определенной длины (г. м. X).

238. На прямой даны подряд точки A, B, C, D. Найти точку X так, чтобы $\angle AXB = \angle CXD$.

Реш. Пользуясь площадями, можно найти $AX:DX$ и $BX:CX$.

239. На круглом бильярде O стоят два шара A и B, находящиеся на диаметре. Как ударить A, чтобы он после одного отражения попал в B?

Замеч. Если путь шара будет ACB, то по закону отражения упругих тел $\angle ACO = \angle OCB$.

XIII. XIV. 240. *На данной окружности найти точку*, касательные из которой к двум другим окружностям равны между собой.

241. Через точку A провести окружность, делящую две данные окружности пополам (XIII и XI).

242*. Через данную точку провести окружность, пересекающую две данные окружности под прямыми углами.

243. Провести окружность, пересекающую три данные окружности под прямыми углами (242, II).

244. Провести окружность, делящую пополам три данные окружности.

245. К двум пересекающимся окружностям проведена общая касательная. Разделить ее пополам с помощью одной линейки.

246. Провести прямую, делящую пополам касательную к двум данным окружностям, не проводя самой касательной (245, II).

247. Описать окружность, встречающую две данные окружности под прямыми углами так, чтобы касательная к ней из данной точки имела данную длину.

Реш. Для определения центра служит г. м. XIII и XI, а для определения точки касания — г. м. V.

248. Описать окружность, делящую две данные окружности пополам так, чтобы касательная к ней из данной точки была данной длины (сходно с предыд.).

249. Описать окружность, пересекающую окружность O пополам, а окружности O_1 и O_2 под прямыми углами (г. м. XI).

250. Описать окружность, встречающую одну данную окружность под прямым углом, а две другие данные окружности по их диаметрам (г. м. XIII и XI).

251*. Описать окружность так, чтобы она делила пополам данные окружности O_1 и O_2, и сама делилась пополам данной окружностью O_3 (г. м. XIII и X).

252. Через данную точку M радиусом R провести окружность, пересекающую данную окружность O по хорде данной длины.

253. Дана окружность O и точка M. Через точку M провести новую окружность O_1, встречающую первую окружность в A и B так, что углы AOB и AO_1B имеют данную величину.

254. Через данную точку провести окружность известного радиуса так, чтобы она встречала данную окружность под прямым углом.

255. Данным радиусом провести окружность, касающуюся одной данной окружности и делящую пополам другую данную окружность.

256. Данным радиусом провести окружность, касательную к данной прямой и пересекающую другую данную окружность по хорде данной длины.

257. Провести данным радиусом окружность, встречающую две данные окружности по хордам, длина которых дана.

258*. В данной окружности провести хорду данной длины так, чтобы отношение расстояний ее концов до данной точки A было данное (г. м. XII и I).

Вместо отношения расстояний можно дать разность или сумму их квадратов (г. м. X и XI).

259. Данным радиусом провести окружность, встречающую данную окружность O под данным углом, так, чтобы касательная к ней из данной точки A имела данную длину.

260. Даны две концентрические окружности. Через данную точку провести окружность, встречающую данные окружности по хордам данной величины (определим искомый радиус).

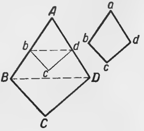
261. Даны две концентрические окружности O и еще окружность O_1. Провести окружность, встречающую окружности O и O_1 по хордам данной длины (259, II).

О подобных фигурах и центре подобия.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники называются подобными. Если два выпуклых многоугольника имеют соответственно равные углы и сходственные пропорциональные стороны, то эти

многоугольники называются подобными[1]). Если два подобных многоугольника расположены так, что сходственные их стороны параллельны, то такие многоугольники называются *гомотетическими* (homothétiques). Далее речь идет исключительно о выпуклых многоугольниках.

I. Если два выпуклых многоугольника имеют соответственно равные углы, кроме одной пары, и все пропорциональные стороны, кроме двух смежных, то они подобны.



Черт. 44.

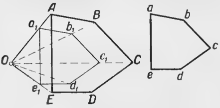
Пусть в четырехугольниках $ABCD$ и $abcd$ (черт. 44) $A = a$, $B = b$, $C = c$ и $BC : bc = CD : cd$.

Так как сумма углов всякого четырехугольника равна $4d$, то, очевидно, $D = d$.

Наложив четырехугольник так, чтобы углы A и a совпали, заменяем фигуру $abcd$ фигурой $Abcd$. Треугольники BCD и bcd, имея по равному углу между пропорциональными сторонами, подобны, и потому $\angle dbc = \angle DBC$. Но так как $\angle ABC = \angle abc$, то и $\angle Abd = \angle ABD$; след., треугольники ABD и Abd, имея по два равных угла, подобны. Фигуры $ABCD$ и $Abcd$ состоят из подобных треугольников и потому подобны. Дальше эту теорему легко доказать для пятиугольников, шестиугольников и т. д.

II. Два подобных многоугольника всегда можно сделать гомотетическими.

В двух подобных многоугольниках $ABCDE$ и $abcde$ (черт. 45), имеем $A = a$, $B = b$, $C = c$, и т. д.,



Черт. 45.

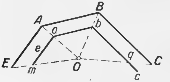
$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{AE}{ae}.$$

Пусть $AB \parallel a_1b_1$, равной ab. Если O есть пересечение Aa_1 и Bb_1, то, проводя $b_1c_1 \parallel BC$, из подобия $\triangle ABO$ и $\triangle a_1b_1O$, BOC и b_1Oc_1, имеем $AB : a_1b_1 = BO : Ob_1 = BC : b_1c_1$, откуда $AB : a_1b_1 = BC : b_1c_1$; но по положению $AB : ab = BC : bc$ и $a_1b_1 = ab$; след., $b_1c_1 = bc$. Вследствие параллельности сторон $\angle ABC = \angle a_1b_1c_1$, и потому $\angle a_1b_1c_1 = \angle abc$. Подобным образом можно доказать, что многоугольник $a_1b_1c_1d_1e_1$, у которого стороны параллельны сторонам $ABCDE$, равен многоугольнику $abcde$.

III. Прямые, соединяющие вершины равных углов двух гомотетических многоугольников, пересекаются в одной точке.

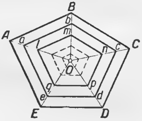
[1]) Это определение содержит два лишних признака (см. ниже, т. I), но употребляется ради краткости.

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $abcde$ (черт. 46) гомотетические; соединим A и a, B и b, и точку пересечения O соединим с вершиной C; если точка q есть точка пересечения bc с OC, то из подобия $\triangle\triangle\ AOB$ и aOb, BOC и bOq имеем $AB:ab = OB:Ob$ и $BC:bq = OB:Ob$, откуда $AB:ab = BC:bq$; сравнивая эту пропорцию с данной $AB:ab = BC:bc$, находим $bq = bc$, т. е., точка q совпадает с точкой c, и прямая OC проходит через c. Также докажем, что прямая OD проходит через точку d и т. д. Точка O называется центром подобия многоугольников $ABCDE$ и $abcde$. Он имеет следующее свойство: *вершины соответственных углов двух гомотетических многоугольников лежат с центром подобия на одной прямой.* Отношение $AB:ab$ называется отношением подобия; оно равно отношению $AO:aO$. Для равных фигур отношение подобия равно единице.



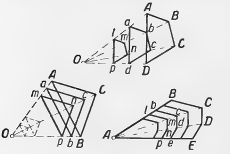
Черт. 46.

Чтобы несколько гомотетических многоугольников имели один центр подобия (черт. 47), достаточно, чтобы вершины одного ряда соответственных углов (напр. A, a, l, и т. д.) лежали на одной прямой и чтобы $AO:aO:lO\ldots = AB:ab:lm\ldots$



Черт. 47.

Центр подобия может лежать не внутри многоугольников, а вне их (черт. 48). Свойства центра подобия при этом остаются те же, так как наши рассуждения не зависели от положения точки O. Иногда центр подобия фигур бывает в вершине одной из фигур. Так центр подобия фигур $ABCDE$, $Abcde$, $Almnp\ldots$ с одной общей вершиной находится в этой общей вершине A.


Черт. 48.

Положим, что для многоугольников $ABCDE$ и $abcde$ (черт. 47) и для многоугольников $ABCD$ и $abcd$ (черт. 48) отношение подобия равно n (это значит, что стороны AB, BC, $CD\ldots$ в n раз больше сторон ab, bc, $cd\ldots$). Тогда выражаются следующим образом: „многоугольник $ABCDE$ равен многоугольнику $abcde$, *умноженному* на число n относительно центра подобия O" или „если помножим многоугольник $ABCDE$ на число $\frac{1}{n}$ относительно центра подобия O, то получим многоугольник $abcde$". На тех же чертежах сторона ab помножена на число n относительно центра

подобия O, и после этого получилась сторона AB; точно так же отрезок CD умножен на число $\frac{1}{n}$ относительно центра подобия O, и после этого получился отрезок cd.

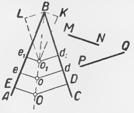
Все линейные элементы[1]) многоугольника $ABCDE$ (черт. 47 и 48) в n раз больше линейных элементов фигуры $abcde$. Это доказывается совершенно подробно 78, I. С умножением многоугольника на какое-либо число (это число может быть и дробное) его линейные элементы умножаются на то же число, а площадь и плоскостные элементы на квадрат того же числа. При умножении фигур форма или вид их остаются одни и те же. На основании сказанного легко решить следующие две очень важные задачи.

262. *Построить многоугольник, подобный данной фигуре abcde так, чтобы одна его сторона равнялась отрезку AB, параллельному ab* (черт. 48 и 47).

Определив точку O и прямые cO, dO и eO, проводим из A и B параллели. Если условие $AB \parallel ab$ не дано, то надо сначала применить 11, II, выбрав точку O произвольно.

263. *Помножить фигуру ABCD* (черт. 48) *на число p:q относительно центра подобия O.*

Если p и q суть данные отрезки и $p < q$, то разделим AO, BO... в отношении $p:(q-p)$ и соединим точки деления.



Черт. 49.

На основании свойств центра подобия очень легко отыскиваются различные геометрические места. Например:

264. *Найти внутри* $\angle ABC$ *точку так, чтобы отрезки, проведенные из этой точки до сторон угла параллельно данным отрезкам MN и PQ, находились в данном отношении m:n* (черт. 49).

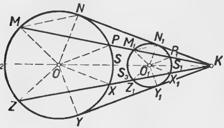
Пусть найдены две точки O и o так, что $OE:OD = oe:od = m:n$, причем OE и $oe \parallel MN$, а OD и $od \parallel PQ$. Замечаем, что фигуры $EBDO$ и $eBdo$ подобны (т. I, стр. 69). Центр их подобия есть точка B. Следовательно, точки O, o и B лежат на одной прямой. Поэтому все искомые точки лежат на прямой OB, и, чтобы определить эту прямую, надо найти одну какую-нибудь из ее точек. Для этого проводим из B параллели MN и PQ; затем откладываем BK, содержащую m каких-либо произвольных равных частей, и BL, содержащую n таких же частей; из точек L и K ведем $Lo_1 \parallel BC$ и $Ko_1 \parallel AB$. Точка o_1 есть одна из искомых точек, так как $e_1o_1 : d_1o_1 = BK:LB = m:n$. Все искомые точки составляют прямую OB.

[1]) Линейным элементом фигуры называется всякая прямая или кривая, которую мы сумеем начертить на фигуре. Плоскостным элементом фигуры называется часть плоскости фигуры, ограниченная какими-нибудь линейными элементами.

Если для построения искомой фигуры даны только ее углы и отношения всех сторон, за исключением двух смежных, то самую фигуру построить нельзя, а можно только построить множество фигур, подобных искомой фигуре. Таким образом станет известна только форма или вид фигуры, а не самая фигура. Условия, дающие возможность определить вид фигуры, весьма многочисленны. Чтобы получить эти условия, надо взять условия любой задачи, которая дает возможность построить фигуру по каким-либо данным, и заменить в этом условии данные отрезки отношением этих отрезков. Поступая таким образом для примера с зад. 124, II, найдем, что эта задача или невозможна или дает совпадающие треугольники. Отсюда заключаем, что треугольники, имеющие одинаковые A и $a:m_a$, подобны. Такого рода критерий подобия фигур часто оказывается очень сильным. См., напр., 77 и 104, I и в особенности 112 и 113, IV.

Центр подобия окружностей.

Проведем в двух окружностях O и O_1 (черт. 50) по одному направлению попарно параллельные радиусы OM и O_1M_1, ON и O_1N_1.



Черт. 50.

Пусть MM_1 встретит OO_1 в точке K; тогда $\triangle\triangle$ OMN и $O_1M_1N_1$ подобны, K есть центр их подобия. Поэтому прямая NN_1 встретит линию центров также в точке K. Подобным образом можно доказать, что все секущие, соединяющие концы двух параллельных радиусов двух окружностей, встречают линию центров в одной и той же точке. Точка K называется *центром подобия окружностей* O и O_1. Так как общая касательная YY_1 также соединяет концы параллельных радиусов (OY и $O_1Y_1 \perp YY_1$), то она также проходит через центр подобия.

Обратно, если к данным окружностям проведем секущую из точки K, например, секущую KX_1X, то она дает два параллельных радиуса OX и OX_1. Это легко доказывается, предполагая обратное.

Другое замечательное свойство центра подобия двух окружностей выводится следующим образом. Будем называть точки M и M_1, Z и Z_1, P и P_1, X и X_1 соответственными, а точки M и P_1, M_1 и P, Z и X_1, X и Z_1 несоответственными. Взяв секущую MK, из подобия $\triangle\triangle$ MOK и M_1O_1K, POK и P_1O_1K имеем две пропорции $MK:M_1K=OK:O_1K$ и $PK:P_1K=OK:O_1K$. Сравнивая эти пропорции, получаем $MK:M_1K=PK:P_1K$, откуда выходит $MK \cdot P_1K = M_1K \cdot PK$... (1). Но по свойству касательных имеем следующие равенства: $KY^2=MK \cdot PK$ и $KY_1^2=M_1K \cdot P_1K$; перемножив эти равенства и переставив множителей во второй части, получим $KY^2 \cdot KY_1^2=$

$= MK \cdot P_1K \cdot PK \cdot M_1K = (MK \cdot P_1K)^2 = (M_1K \cdot PK)^2$, на осн. (1). Извлекая квадратный корень, найдем $KY \cdot KY_1 = MK \cdot P_1K = M_1K \cdot PK$. Но произведение $KY \cdot KY_1$ есть величина постоянная; поэтому подобные равенства можно написать для всякой секущей. Таким образом выходит: $MK \cdot P_1K = M_1K \cdot PK = ZK \cdot X_1K = Z_1K \cdot XK = S_3K \cdot SK = S_2K \cdot S_1K = KY \cdot KY_1$. Следовательно, произведения расстояний центра подобия до двух несоответственных точек, лежащих на секущей, по которой отмериваются эти расстояния, равны для всех секущих; каждое из таких произведений есть величина постоянная, равная произведению касательных из центра подобия к данным окружностям.

Положим $OM = R$ и $O_1M_1 = R_1$; в таком случае говорят: „окружность O_1 получилась тогда, когда окружность O помножили на число $\frac{R_1}{R}$ при центре подобия K“. Пусть данную окружность O надо помножить на число n так, чтобы центр подобия данной и умноженной окружности был в точке K (черт. 50). На произвольной секущей MK определим точку M_1 так, чтобы $MK : M_1K = 1 : n$, и из M_1 проведем $M_1O_1 \parallel MO$; тогда O_1 будет центр, а O_1M_1 — искомый радиус. В этом случае выражаются так: „окружность O *умножена* на n относительно центра подобия K“. Аналогично 78, I легко доказать следующую теорему: *если окружность умножить на какое-нибудь число, то все ее линейные элементы умножатся на то же число, а все плоскостные ее элементы умножатся на квадрат того же числа.* Так, например, хорда M_1N_1 больше хорды MN в n раз, и хорда $M_1P_1 = MP \cdot n$.

Если радиусы OM и O_1M_1 проведены параллельно, но по разному направлению, то получится центр подобия, лежащий между окружностями. Такой центр подобия называется обратным центром подобия; через него проходит внутренняя касательная к обеим окружностям. Свойство центра подобия может принадлежать не двум, а нескольким окружностям; для этого окружности должны быть расположены так, чтобы все они имели две общих касательных.

Метод подобия.

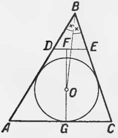
Если требуется построить какую-нибудь фигуру или отыскать положение точки, связанной с положением какой-нибудь фигуры, то очень часто бывает выгоднее строить не искомую фигуру, а фигуру, подобную неизвестной фигуре. Построив фигуру, подобную искомой, должно из множества подобных фигур выбрать одну, удовлетворяющую условиям вопроса или только по своим размерам, или по своему положению и по своим размерам. В этом состоит метод подобия. Очевидно, что условия каждой задачи, которая решается методом подобия, делятся на два разряда: одни условия дают возможность построить фигуру, подобную искомой, остальные же дают возможность построенную фигуру умножить известным образом и, если нужно, поместить, как требуется. Первые условия,

напр., для построения треугольников, состоят в том, что даны: или два угла треугольника, или же угол и отношение двух сторон, его заключающих, или же отношение трех сторон, и т. п.; эти условия исчерпываются теоремами, определяющими вид или подобие фигур. Вторые условия или только определяют какую-нибудь линейную часть треугольника (сторону его, высоту, биссектор, и т. п.) и дают возможность переделать построенную фигуру в искомую, или, кроме того, дозволяют построенную фигуру поместить требуемым образом. В последнем случае положение фигуры определяется тем, что некоторые стороны фигуры должны проходить через данные точки или должны иметь известное направление.

Вот примеры, поясняющие употребление этого обширного метода решения геометрических задач.

265. *Построить треугольник, зная $a:c$, B и r.*

Так как в искомом треугольнике известны угол и отношение сторон этого угла, то, оставив остальные условия, построим треугольник, подобный искомому. Для этого на сторонах данного угла (черт. 51) отложим BD, равную m каких-нибудь равных частей, и BE, равную n таких же частей, и соединим точки D и E. Тогда искомый треугольник и $\triangle DBE$ подобны, так как они имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами. Проводя в угле B отрезки, параллельные DE, будем получать треугольники, подобные искомому, но с различными радиусами вписанных окружностей; из всех этих треугольников надо выбрать один, у которого радиус вписанной окружности равен r. Определив центр O (104, II), легко построить самый треугольник. Нужно провести $OF \perp DE$; на продолжении его отложить $OG = r$ и через точку G провести $AC \parallel DE$. Тогда $\triangle ABC$ искомый. Одно всегда возможное решение.



Черт. 51.

Таким образом, первые два условия задачи (даны угол треугольника и отношение сторон, содержащих этот угол) помогли нам построить фигуру, подобную искомой, а третье данное (дан радиус r) дало возможность перейти от построенной фигуры к искомой. Всегда очень полезно предварительно разбивать условия задачи на эти две части.

266. *Построить треугольник, зная B, b_B и отношение $m:n$ отрезков AD и DC, определенных высотой BD.*

Построим треугольник, подобный искомому. Для этого (черт. 52) к произвольной прямой ac восставим, где угодно, перпендикуляр и от его основания d в разные стороны отложим ad и dc так, чтобы $ad:dc = AD:DC$; затем на ac описываем дугу, вмещающую угол B. Соединяя точку пересечения дуги и перпендикуляра с точками a и c, получим $\triangle aBc$, подобный искомому (77, I). Чтобы перейти от $\triangle aBc$ к искомому, замечаем, что биссектор угла B равен Be, тогда

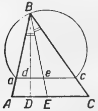
как в искомом треугольнике он должен равняться b_B. Следовательно, $\triangle aBc$ надо умножить на $b_B : Be$. В подобных случаях умножение делается очень просто.

Именно, на Be надо отложить $BE = b_B$ и через точку E провести $AC \parallel ac$. $\triangle ABC$ — искомый. В нем угол B и биссектор BE — данной величины. Затем из пропорции $AD : ad = BD : Bd = DC : dc$ находим $AD : DC = ad : dc$.

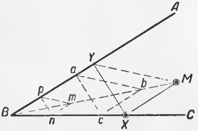
В предыдущих примерах не было дано условий, определяющих положение искомой фигуры. Переходим к тем задачам, в которых построенной фигуре надо дать требуемое положение; в задачах такого рода надо пользоваться свойствами центра подобия.

267. *Дан $\angle ABC$ и внутри его M. Найти на стороне BC точку X, равноотстоящую от AB и от точки M.*

Пусть точка X найдена так (черт. 53), что перпендикуляр $XY = MX$. Задача сводится к построению фигуры YXM. Вообразим целый ряд фигур abc, $pmn, \ldots$, гомотетических с искомой фигурой.



Черт. 52.



Черт. 53.

Достаточно построить одну из этих фигур, например, abc, так как тогда останется провести из M параллель bc, и задача будет решена. Для построения фигуры abc замечаем, что B есть центр подобия искомых фигур, и потому точки M, b, m и B лежат на одной прямой BM; сверх того, $ac \perp AB$, $ac = bc$, положение же точки a произвольно. Поэтому для построения фигуры abc надо в произвольной точке a восставить $ac \perp AB$, из центра c описать радиусом ac дугу, которая пересечет BM в точке b. Проводя $MX \parallel bc$, определим искомую точку X. Таким образом доходим до следующего решения.

Восставим перпендикуляр к AB в произвольной точке p и, продолжив его до n, радиусом np начертим дугу, которая пересечет BM в точке m. Проведем $MX \parallel mn$; BC и MX встретятся в искомой точке X. Докажем это. Опустив перпендикуляр XY, из подобия треугольников находим $MX : mn = BX : Bn = XY : np$, откуда $MX : mn = XY : np$; но так как по построению $mn = np$, то $MX = YX$.

Задача всегда возможна и имеет два решения, так как дуга из центра n встречает BM всегда в двух точках.

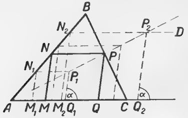
Следует заметить, что сущность решения остается та же, если вместо перпендикуляра XY требуется провести отрезок, образую-

щий с AB какой-нибудь данный угол и находящийся в известном отношении к MX.

268. *В данный $\triangle ABC$ вписать параллелограм, имеющий определенный вид,* например, имеющий данный угол α и отношение сторон, его заключающих, равное отношению $m:n$.

Положим, что в $\triangle ABC$ вписан (черт. 54) параллелограм $MNPQ$ так, что $\angle NMQ=\alpha$, и $NP:NM=m:n$.

Если бы мы знали положение точки P, то нам оставалось бы провести $NP \parallel AC$ и PQ под углом α к основанию AC; тогда определился бы весь искомый параллелограм. Поэтому вопрос приводится к определению точки P. Для определения ее вообразим целый ряд фигур, гомотетичных фигуре $MNPQ$, и построим одну из них. Чтобы это сделать, из произвольной точки N_2 проведем $N_2D \parallel AC$ и N_2M_2 так, чтобы $\angle N_2M_2Q=\alpha$; затем отложим на DN_2 часть N_2P_2 так, чтобы $N_2P_2:N_2M_2=m:n$, и проведем $P_2Q_2 \parallel N_2M_2$. Фигура $M_2N_2P_2Q_2$ гомотетична фигуре $MNPQ$ (стр. 69); подобным образом можно составить целый ряд фигур, гомотетичных искомой фигуре. Замечаем, что центр подобия всех этих фигур есть точка A, и потому точки P_1, P, P_2, ... лежат все на одной прямой AP_2. Это следствие вполне указывает, как найти точку P.



Черт. 54.

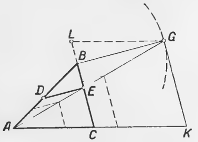
Именно, построим вышеуказанным способом фигуру $M_2N_2P_2Q_2$ и соединим точки A и P_2; в пересечении BC и AP_2 получится искомая точка P. Из точки P проведем $PN \parallel AC$, $PQ \parallel P_2Q_2$, а из точки N проведем $NM \parallel PQ$. Фигура $MNPQ$ будет искомая. В самом деле $\angle NMQ=\angle N_2M_2Q=\alpha$ по построению; $NM=PQ$ и $NP=MQ$, как отрезки параллельных между параллельными. Фигуры $ANPQ$ и $AN_2P_2Q_2$ подобны, ибо они состоят из подобных треугольников, поэтому $NP:PQ=N_2P_2:P_2Q_2=m:n$ по построению. Следовательно, фигура $MNPQ$ удовлетворяет всем требованиям.

Весьма важно заметить, что способ решения этой задачи может быть распространен на бесчисленное множество задач. Так, например, полагая $m=n$ и $\alpha=90^\circ$, получим решение следующей задачи: „вписать квадрат в данный треугольник"; полагая $m=n$, получим решение следующей задачи: „вписать в данный треугольник ромб с данным углом"; полагая $\alpha=90^\circ$, получим решение следующей задачи: „вписать в данный треугольник прямоугольник известного вида"; далее, так как вместо параллелограмов можно брать их половины, то в решении этой задачи заключено решение следующей задачи: „в данный треугольник вписать треугольник определенного вида так, чтобы одна сторона искомого треугольника была известного направления". Способ решения остается тот же, если в данный треугольник вместо параллелограма требуется вписать четырехугольник

известного вида так, чтобы все четыре его вершины лежали на сторонах данного треугольника.

269. *В угле B треугольника ABC провести отрезок DE так, чтобы отрезки AD, DE и EC были равны между собой.*

Пусть отрезок DE (черт. 55) проведен так, что $AD = DE = EC$. Задача сводится к построению фигуры $ADEC$; построим фигуру, гомотетичную этой фигуре. Для этого из точки B проводим прямую, параллельную ED, до пересечения с AE в точке G, из точки G ведем $GK \parallel CE$. Получилась фигура $ABGK$, гомотетичная искомой $ADEC$, так как $\triangle\triangle\, ADE$, ABG, AEC и AGK попарно подобны. Мы видим, что, построив фигуру $ABGK$, сейчас же найдем точку E в пересечении прямых AG и BC, а затем и всю фигуру $ADEC$, проводя $ED \parallel BG$. Для построения фигуры $ABGK$ из подобия фигур $ABGK$ и $ADEC$ замечаем, что $AB = BG = GK$, так как $AB:BG:GK = AD:DE:EC$. Вследствие этого построение фигуры $ABGK$ исполняем следующим образом. Так как точка G отстоит от B на расстоянии, равном AB, то из B радиусом, равным AB (черт. 55) начертим дугу. Так как GK должна равняться AB и быть параллельной BC, то на прямой BC отложим $LC = AB$ и из точки L проведем $LG \parallel AK$; из пересечения этой параллели с проведенною дугой проведем $GK \parallel BC$. Составится фигура $ABGK$. Соединяя A с G, из пересечения прямых AG и BC проводим $ED \parallel BG$. Отрезок DE искомый. На самом деле, из подобия фигур $ADEC$ и $ABGK$ (фигуры эти состоят из подобных треугольников) следует $AD:DE:EC = AB:BG:GK$; но так как $AB = BG = GK$ по построению, то $AD = DE = EC$. Задача имеет два решения, если расстояние точки B до прямой LG меньше AB, одно решение, если эти длины равны, и в противном случае решений нет.



Черт. 55.

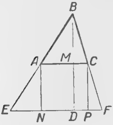
Фигуру, гомотетичную искомой, мы построили на стороне AB; но можно было ее строить на произвольном отрезке, как и показано на чертеже пунктиром (черт. 55).

Построив фигуру, подобную искомой, мы переходим от построенной фигуры к искомой и в сущности всегда данную задачу сводим на другую задачу; поэтому надо всматриваться внимательнее, к какой задаче выгоднее привести данную задачу. Если же известны вид фигуры и какой-либо линейный элемент ее, то сейчас же можно применить метод умножения фигур. Покажем то и другое на следующем примере.

270. *Построить треугольник, зная* A, C *и* $b + h_b = s$.

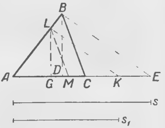
Построим $\triangle EBF$, подобный искомому, но чтобы он имел высоту BD, равную s (черт. 56). Если ABC есть искомый треугольник (он непременно меньше треугольника EBF), то значит, $EF \parallel AC$ и $AC +$

$+MB=s$, откуда следует, что $MD=AC$; кроме того, проводя AN и $CP \parallel BD$, мы видим что $AN=AC=CP$. Эти равенства показывают, что фигура $NACP$ есть квадрат, который вписан в $\triangle EBF$. Таким образом доходим до следующего решения. Построим $\triangle EBF$ по данным углам $E=A$ и $F=C$ и по высоте s, затем в $\triangle EBF$ впишем квадрат $NACP$ (268, II). $\triangle ABC$ будет искомый. Доказательство очень просто. Таким образом, задача привелась к двум задачам, нам уже известным. Если бы мы не обратили внимания на то, что здесь имеет приложение задача „вписать квадрат в треугольник", и не построили треугольника с высотой, равной s, то не решили бы этой задачи так скоро; но все-таки наше решение есть дело главным образом удачи [1]), и этот способ решения есть не более, как частный случай. Общий же способ решения таких задач основан на теореме (78, I) и состоит в следующем.



Черт. 56.

Так как даны два угла треугольника, то его вид известен и потому построим какой-нибудь $\triangle ALM$, подобный искомому (черт. 57); затем измеряем сумму его высоты LG и основания AM. Если построение сделано так удачно, что $LG+AM=s$, то $\triangle ALM$ и будет искомым. Но вообще этого не случится, и сумма $AM+LG$ будет равна s_1, а не s. Чтобы переделать $\triangle ALM$ в искомый, надо его умножить на $(s:s_1)$; тогда и высота LG и основание AM умножатся на $(s:s_1)$, и сумма $LG+AM$ будет равна s. С этой целью не надо измерять, во сколько раз s_1 более или менее s, а нужно отложить $AE=s$ и $AK=s_1$, провести $BE \parallel KL$ и $BC \parallel LM$. Тогда $\triangle ABC$ будет искомый. В самом деле, углы при основании у него будут данные. Затем из пропорций $AB:AL=AC:AM$ и $AB:AL=AE:AK$ выходит $AC:AM=AE:AK$, откуда $AC=AM\cdot(s:s_1)$. Это равенство показывает, что сторона AM умножилась на $(s:s_1)$; след., и высота BD умножилась на то же число, и потому $AC+BD=(AM+LG)\cdot(s:s_1)=s$.



Черт. 57.

Предположим теперь, что в условии нашей задачи вместо суммы высоты с основанием дано:

1. *Произведение высоты на основание, равное k^2.* Тогда находим произведение $LG\cdot AM$. Для того, чтобы это сделать, на произвольной прямой отложим части $XZ=LG$ и $ZY=AM$ и опишем

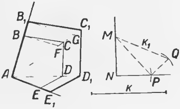
[1]) Такая удача, однако, не должна особенно удивлять нас, так как в сущности здесь применен метод спрямления.

полуокружность на XY как на диаметре; восставим затем $ZV \perp XY$ до встречи с окружностью в точке V. Тогда $VZ^2 = XZ \cdot ZY = LG \cdot AM$. Пусть $VZ = k_1$; умножим $\triangle ALM$ на $k : k_1$ и получим требуемое.

2. *Разность квадратов основания и высоты, равная k^2.* Построив $\triangle ALM$, найдем разность квадратов AM и LG. Для этого на произвольной прямой отложим часть $XY = AM$ и опишем на XY полуокружность как на диаметре; затем опишем дугу из центра X радиусом, равным LG, до встречи с полуокружностью в точке Z. Тогда $ZY^2 = AM^2 - LG^2$. Пусть $ZY = k_1$; $\triangle ALM$ умножим на $k : k_1$ и получим требуемое.

3. *Сумма квадратов основания и высоты.* Сходно с предыд.

4. *Произведение трех сторон на одну из высот, равное k^4.* Построив $\triangle ALM$, найдем $AL \cdot LM = k_1^2$ и $AM \cdot LG = k_2^2$; затем определим произведение $k_1 k_2$, равное k_3^2. Тогда $(k_1 k_2)^2 = k_3^4$, и $\triangle ALM$ нужно будет помножить на $k : k_3$.



Черт. 58.

Прием, указанный для преобразования построенного треугольника в искомый, называется методом „умножения фигур“ и вполне прилагается к многоугольникам. Например:

271. *Построить пятиугольник с данными углами* (α, β, γ, δ), *зная отношения* ($m : n : p : q$) *двух его смежных сторон и диагоналей, выходящих из одной и той же вершины, если известна сумма квадратов трех других сторон, равная k^2* (черт. 58). Так как достаточно данных, определяющих вид искомой фигуры, то построим сначала пятиугольник, подобный искомому. Если m, n, p и q будут данные отрезки, то, взяв $\angle ABC = \alpha$, отложим часть $AB = m$; из центра A очертим дугу радиусом, равным p, до встречи в точке C с BC; получим $\triangle ABC$. На стороне BC построим $\angle BCD = \beta$ и начертим из центра A дугу радиусом, равным q, до встречи с CD в точке D; получится $\triangle ACD$. Поступая таким же образом, построим фигуру $ABCDE$, подобную искомой. Измеряем теперь сумму квадратов сторон BC, CD и DE. Для этого на сторонах прямого $\angle MNP$ откладываем $MN = BC$ и $NP = CD$; тогда $MP^2 = BC^2 + CD^2$. Восставив $PQ \perp MP$, отложим часть $PQ = DE$; тогда $MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = BC^2 + CD^2 + DE^2$. Если случилось, что $MQ = k$, то фигура $ABCDE$ и есть искомая. Но вообще этого не случится, и положим, что $MQ = k_1$. Тогда многоугольник $ABCDE$ надо помножить на $k : k_1$ относительно какого-нибудь центра подобия, например, A. Для этого на диагонали AC отложим части $AF = k_1$ и $AG = k$; затем проведем $GB_1 \parallel FB$ до встречи в B_1 с прямой AB, $B_1C_1 \parallel BC$ до встречи с прямой AC в точке C_1, $C_1D_1 \parallel CD$ и т. д. Фигура $AB_1C_1D_1E_1$ — искомая. Во-первых, фигуры $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ состоят из подобных треугольников и потому подобны;

следовательно, $AB_1 : AC_1 : AD_1 : AE_1 = m : p : q : n$. Во-вторых, из пропорции $AB_1 : AB = AG : AF$ заключаем, что сторона AB умножилась на $k : k_1$; след., все линейные элементы фигуры $ABCDE$ умножились соответственно на $k : k_1$. Поэтому

$$B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1E_1^2 = \left(BC \cdot \frac{k}{k_1}\right)^2 + \left(CD \cdot \frac{k}{k_1}\right)^2 + \left(DE \cdot \frac{k}{k_1}\right)^2 =$$
$$= \frac{k^2}{k_1^2}(BC^2 + CD^2 + DE^2) = \frac{k^2}{k_1^2} \cdot k_1^2 = k^2.$$

Если искомый многоугольник должен иметь данную площадь s^2, тогда фигуру $ABCDE$ следовало превратить в треугольник и измерить произведение основания на половину высоты, равное s_1^2; затем фигуру $ABCDE$ осталось бы помножить на $(s : s_1)$.

Соображая сказанное в задачах 270 и 271, мы можем сделать следующее заключение. Всякая задача, имеющая следующий общий тип: „построить фигуру известного вида, зная длину или какую-нибудь степень длины, происшедшей от различных действий с линейными элементами искомой фигуры", легко решается методом умножения фигур. Для возможности задач подобного типа необходимо, чтобы показатель степени длины был целой степенью числа 2. Таким образом, метод умножения фигур дает возможность решить бесчисленное множество задач, повидимому, весьма трудных. Тот же метод вполне приложим к окружностям, как показывают задачи 318, 319, 466.

Задачи 267—269 ясно показывают, что метод подобия требует знания геометрических мест и что метод геометрических мест часто входит в метод подобия. Подобным образом метод подобия часто входит в другие методы, то-есть, задача, решаемая каким-либо методом, приводится к методу подобия. Это может случиться следующим образом.

α) Введем в построение данные и тогда воспользуемся методом подобия (346, 365, 371, 376, II). К этому приему можно отнести тот случай, в котором введение данных в построение дает возможность определить отношение неизвестных. Пусть, напр., требуется в угле B треугольника ABC провести отрезок XY так, чтобы $AX = kXY - a$ и $CY = mXY + b$. На продолжении BA отложим $AD = a$ и на BC отрезок $CE = b$. Тогда $DX = kXY$, а $EY = mXY$ и задача приведена к 269, II[1]).

β) Построим в искомой фигуре то, что непосредственно возможно, и тогда употребим метод подобия (307, 308, 418).

γ) Построим где-нибудь фигуру, подобную искомой, и затем нанесем ее на данную фигуру (295, 301, 329—337).

δ) Отбросим одно из данных, построим геометрическое место искомой точки и затем примем отброшенное условие (268, 300, 306).

---

[1]) Этот прием употребляется и в арифметике (Методы реш. ариф. задач Александрова, стр. 33, № 52).

Для некоторых случаев (293, 319, II) этот прием удобнее выразить в такой форме: отбросим одно из условий, определяющих положение искомой фигуры, и построим ее в произвольном положении, а затем, меняя размеры построенной фигуры, приведем ее в требуемое положение.

ε) Для построения касательных прямых и окружностей нередко бывает полезна следующая идея. Вообразим искомую окружность концентрически сжимающейся или расширяющейся до такого предела, который позволит задачу свести на более простую задачу. Иногда такому же преобразованию подчиняют не искомую, а данную окружность (287, 326, 328).

Задачи на метод подобия.

Построить треугольник, зная:

272. A, h_a, $b:c$. **273.** B, a, $h_b:b$ (104, I).

274. A, $a:c$ и h_c. **275.** a, $h_a:h_b$, если $b=c$.

276. A, B, $a\pm b$. **277.** A, $2p$, $c:h_c$ (104, I).

278. a, b, $c:h_c$ (г. м. XII, γ). **279.** $a:b$, $b:c$ и $m_a+m_b+m_c$.

280. $S=k^2$, $\angle(m_a, b)$ и $\angle(m_a, c)$. **281.** h_a, h_b и $\angle(h_c, a)$ (91, I).

282. h_a, h_b, и $a:c$ (91, I). **283.** h_a, h_b, h_c (92, I).

284*. Построить трапецию по данным двум смежным сторонам, углу между ними и отношению прочих сторон.

285. Построить треугольник, зная отношение квадратов катетов и периметр (77, I).

286*. В данный сегмент (или сектор) вписать квадрат и обобщить задачу (268, II).

287. Провести окружность, касательную к двум прямым AB и AC и к данной окружности O (ε, 267, II).

288. Через данную точку провести окружность, пересекающую две данные прямые под данными углами (116 и 267, II).

289*. Через точки A и B провести окружность, пересекающую данные две параллели в X и Y так, что $XY=AB$ (267, II).

290. Дан угол и две точки. Провести через одну точку окружность, отсекающую от сторон угла равные хорды, так, чтобы касательная к ней из другой точки встретила одну сторону угла под данным углом (267, II, δ).

291*. Даны точка и прямая. Из данной точки M провести три прямые, образующие между собой данные углы и отсекающие на данной прямой PQ отрезки, находящиеся в данном отношении (γ).

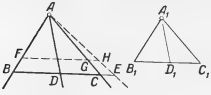
292*. Даны две окружности и на них по точке. Провести две равные окружности, касающиеся в данных точках данных окружностей и между собой.

Вместо окружностей можно дать две прямые и вместо равенства радиусов — их отношение (269, II).

293. Внутри угла дана точка A; вписать в этот угол $\triangle PAQ$ так, чтобы его угол при A равен был данному углу, а прямая PQ была параллельна данной прямой (δ).

294. Построить треугольник известной формы так, чтобы его вершины лежали на трех данных прямых (четыре случая).

295. Даны три прямые, выходящие из одной точки, и точка. Через эту точку провести прямую, отрезки которой между данными прямыми находятся в данном отношении (γ и δ).



Черт. 59.

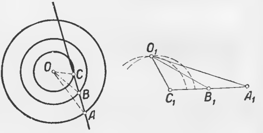
Реш. Секущая $BDCE$ — искомая. На произвольной прямой отложим части B_1D_1 и D_1C_1 так, чтобы отношение $B_1D_1 : D_1C_1$ было данное; на B_1D_1 и D_1C_1 опишем дуги, вмещающие углы, равные углам BAD и DAC. Пусть эти дуги встретились в точке A_1. Отложим $AF = A_1B_1$, $AG = A_1C_1$ и проведем $EB \parallel FG$ (черт. 59).

296. Даны прямые AB, AC, AD и еще прямая. Провести секущую так, чтобы полученные между данными прямыми три отрезка были в данном отношении.

297. В окружности даны два радиуса. Провести хорду, делящуюся этими радиусами на три равные части (γ).

298*. Трапецию пересечь отрезком, параллельным основанию, так, чтобы он разделился диагоналями на равные части (γ).

299. Даны три прямые AB, AC и AD. Начертить в известном направлении четвертую прямую так, чтобы произведение ее отрезков между данными прямыми было данное (γ).



Черт. 60.

300. На окружности даны точки A, B и C. Провести хорду BE, встречающую AC и окружность в точках D и E, так, чтобы отношение ED и EC было данное. *Реш.* Возьмем C за центр подобия.

301. Даны три концентрические окружности (черт. 60). Провести секущую ABC (A, B и C точки встречи с окружностями) так, что $AB = BC$.

Реш. Отложим на произвольной прямой две равные и произвольные части C_1B_1 и B_1A_1. Отыщем геометрическое место точек, расстояния которых до точек C_1 и B_1 находятся в отношении $OC : OB$; затем отыщем геометрическое место точек, расстояния которых до точек C_1 и A_1 пропорциональны OC и OA. Обе построенные окруж-

ности встретятся в точке O_1. Тогда достаточно построить при O угол, равный $\angle C_1O_1A_1$, в произвольном положении.

302. Построить прямоугольный треугольник, зная r и отношение катета к проекции другого катета на гипотенузу (г. м. VII).

303. В данный треугольник вписать параллелограм, зная отношение сторон и угол между диагоналями (124, II).

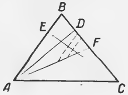
304. Дан сектор. Провести к дуге его касательную так, чтобы отрезок ее, заключенный между продолжениями радиусов, делился в точке касания в данном отношении. *Реш.* Разделим произвольный отрезок в данном отношении и определим точку, соответствующую центру дуги сектора (г. м. V, γ).

305. Даны точки B и C и угол A. Через A и B провести окружность, пересекающую стороны угла по хорде, которая проходила бы через C (γ).

306. Даны окружность и две прямые, AB и CD. Перпендикулярно к CD провести новую прямую так, чтобы ее отрезок между AB и окружностью делился прямой CD в данном отношении.

Реш. Точку встречи AB и CD примем за центр подобия.

307. Построить треугольник, зная h_a, m_a и h_c. *Реш.* Пусть AD и CE — высоты, AF — медиана (черт. 61). Можно построить $\triangle ADF$; так как (91, I) известно $a:c$, то $AB:BF$ тоже известно и вид $\triangle ABF$ легко определить; F — центр подобия. Вместо медианы мог быть дан отрезок, делящий BC в известном отношении.



Черт. 61.

308. Построить треугольник, зная h_a, m_a и $a:c$ (3).

309. Построить треугольник, зная a, b и h_c (г. м. XII или 93, I).

310. Построить треугольник, зная $AE:EB$ и $BD:DC$, где CE и AD суть высоты.

311. Построить треугольник по данному отношению его периметра к отрезкам, определенным на основании биссектором угла (76, I) и сумме $R + r$.

312*. 1) Дана окружность и вне ее точка A. Из точки A провести секущую, внешний отрезок которой находится в данном отношении к внутреннему (γ).

2) Через точку A провести в данной окружности хорду, которая точкой A делится в данном отношении $m:n$.

Реш. Произвольный отрезок делим в данном отношении и отыскиваем точку, соответствующую центру окружности (г. м. XII). Можно также применить умножение окружности, в первом случае, на $m:(m+n)$, а во втором — на $n:m$.

313. В $\triangle ABC$ провести отрезок $DE \perp AB$ так, чтобы он разделил периметр треугольника в данном отношении.

314. Построить правильный многоугольник, равновеликий данной правильной или неправильной фигуре (271, II).

315. Построить n-угольник, зная его углы, отношения между $(n-2)$ сторонами и произведение его диагоналей (271, II).

316. Построить вписываемый четырехугольник, зная его угол, площадь и отношения двух смежных сторон и диагонали (271, II).

317. $\triangle ABC$ разделить пополам прямой, параллельной данной прямой MN.

Реш. Где угодно проведем отрезок $DE \parallel MN$; пусть k_1^2 и k^2 суть площади $\triangle DBE$ и половины $\triangle ABC$; $\triangle DBE$ помножим на $k : k_1$. Задача варьируется на многочисленные способы.

Умножение окружности. 318. Через точку пересечения A двух окружностей провести секущую, определяющую в окружностях хорды, которые, будучи умножены на числа m и n, в сумме дают данную длину. *Реш.* Умножим окружности на m и n относительно центра подобия A и приведем задачу к 136, II.

319. Даны две концентрические окружности. Провести секущую, образующую в окружностях хорды, имеющие данное отношение.

Реш. Одну окружность умножим на данное отношение, сохраняя центр (г. м. V). Решается также с помощью г. м. XII, γ. Если искомые хорды должны проходить через данную точку, то обратимся к г. м. VI, δ.

320*. Даны две окружности и точка A; провести к окружностям параллельные касательные так, чтобы отношение их расстояний до точки A было данное.

Реш. Умножим одну окружность на данное отношение (66, II).

321*. Даны две окружности. Провести к ним касательную окружность так, чтобы или 1) прямая, соединяющая точки касания, проходила через данную точку A (черт. 23), или 2) чтобы $\angle O_1O_3O_2$ имел данную величину (г. м. VI или V).

322. Через данную точку провести прямую, отрезки которой в двух данных окружностях пропорциональны радиусам.

323. На прямой AB даны подряд 4 точки S, S_1, S_2 и S_3. Отыскать на ней такую точку X, чтобы произведения $SX \cdot S_3X$ и $S_1X \cdot S_2X$ были равны (черт. 50).

324. Через точки A и B провести окружность, касательную к данной окружности O (86 и 88, I, 58 и 54, II).

325. Через данную точку A провести окружность, касательную к данной окружности O и прямой MN. *Реш.* Пусть искомая окружность O_1 касается в K и G данных окружности и прямой; опустим $OE \perp MN$, и пусть OE встречает окружность O в точках D и C, а прямая AD встречает искомую окружность в точке F. Тогда $AD \cdot DF = DG \cdot DK = DE \cdot DC$, и потому точка F известна (88, I). Затем остается применить 324, II. 4 решения.

326. Описать окружность, касающуюся двух данных окружностей и данной прямой (ε). *Реш.* R и R_1 — радиусы, $R_1 > R$. Из O_1 опишем окружность радиусом $R_1 - R$; проведем параллель данной прямой на расстоянии R от нее и применим предыдущую задачу. 8 решений.

327. Через данную точку A описать окружность, касательную к двум данным окружностям. *Реш.* Пусть K будет центром подобия

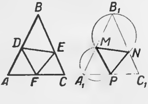
данных окружностей O и O_1 (черт. 50), и B — пересечение искомой окружности и прямой AK. Тогда $AK \cdot KB = KY \cdot KY_1$, и точка B известна (88, I). Затем применим 324, II.

Задача Аполлония. 328*. Описать окружность, касающуюся трех данных окружностей (ε). *Реш.* R, R_1 и R_2 — радиусы. Опишем из центров O_1 и O окружности радиусами $R_1 - R_2$ и $R - R_2$ (327, II).

Метод обратности.

329. *В данный* $\triangle ABC$ *вписать* $\triangle DEF$, *равный данному* $\triangle MNP$.

Вместо того, чтобы в $\triangle ABC$ вписать треугольник (черт. 62), равный $\triangle MNP$, попробуем сделать обратно: около $\triangle MNP$ опишем треугольник, равный треугольнику ABC. С этой целью замечаем, что вершины B и A лежат на дугах, описанных на отрезках $DE = MN$ и $DF = MP$ и вмещающих известные углы B и A; поэтому на сторонах MN и MP опишем эти дуги; затем, так как точки A_1, M и B_1 должны лежать на одной прямой, то через точку пересечения этих дуг надо провести секущую, сумма отрезков которой в окружностях равняется AB (136, II); в пересечении этой секущей с проведенными дугами получим точки A_1 и B_1, а затем и $\triangle A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны между собой. Затем отложим $AD = A_1M$, $AF = A_1P$ и $BE = B_1N$; таким образом получим $\triangle DEF$, равный $\triangle MNP$ и вписанный в $\triangle ABC$. Равенство $\triangle\triangle\ DEF$ и MNP очевидно из равенства треугольников DAF и MA_1P, DBE и MB_1N[1]).



Черт. 62.

В других методах мы на данных фигурах или каких-нибудь построениях строим искомую фигуру или делаем какое-нибудь построение; в методе же обратности мы на искомой фигуре или на искомых построениях строим данные фигуры и построения, а затем, сделав их, переносим на данные фигуры и построения. Иногда на искомом построении приходится строить фигуры не равные, а подобные данным фигурам; построенную фигуру останется перенести на данные фигуры[2]).

330*. В данный сектор или сегмент вписать треугольник, равный данному (γ).

331. В данный сегмент вписать треугольник известного вида так, чтобы одна его вершина лежала в точке, данной или на хорде, или на дуге сегмента (г. м. XII и II).

---

[1]) Эта задача находится в 1-й книге „Principia mathematica philosophiae naturalis" Ньютона.

[2]) Так понимает метод обратности Дюгамель. В сущности этот метод оказывается нам уже известным (γ).

332. В данный треугольник вписать треугольник известной формы так, чтобы одна из вершин лежала в точке, данной на основании (22, II, γ).

333. Начертить треугольник известного вида так, чтобы вершины его лежали на данных двух или трех концентрических окружностях (г. м. XII, γ).

334. Начертить окружность, которая видна из данных двух точек под данными углами, так, чтобы центр этой окружности был на данной прямой.

335*. Начертить окружность так, чтобы она была видна под данными углами из трех данных точек (г. м. XII, γ).

336. В данный полукруг вписать четырехугольник, подобный данному, так, чтобы две вершины лежали на данном диаметре.

337. Даны окружность и точка. Провести хорду, длина которой находится в данном отношении к расстояниям концов ее до данной точки (два случая, γ).

338. Построить $\triangle ABC$, зная B и радиусы окружностей, описанных около $\triangle\triangle\, ABD$ и CBD, где $BD = m_b$ (90, I).

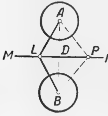
339. Построить четырехугольник $ABCD$ известной формы так, чтобы CD лежала на данной прямой, а вершины A и B — на данной окружности.

Методы преобразования фигур.

Если искомую фигуру сразу построить затруднительно, то ее преобразовывают в какую-нибудь другую фигуру, построение которой можно сделать или легче, или непосредственно. Мы рассмотрим следующие пять способов преобразования фигур.

Метод симметрии и спрямления.

Точки A и B (черт. 63), расстояние между которыми делится пополам прямой $MN \perp AB$, называются симметричными относительно прямой MN; прямая MN называется осью симметрии. Прямые AL и BL, все точки которых симметричны относительно прямой MN, называются симметричными относительно той же оси. Подобным образом равные окружности A и B, центры которых расположены симметрично относительно MN, называются симметричными относительно оси MN. Точку B иногда называют отражением точки A в MN. Точно так же LB и окружность B называются отражениями отрезка AL и окружности A в оси MN.



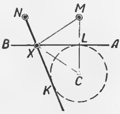
Черт. 63.

Метод симметрии заключается в следующем. Предполагают задачу решенной и одну из данных точек (прямую или окружность) отражают в какой-нибудь известной оси; иногда эта ось проходит через известную точку. Тогда полученную симметричную точку (пря-

мую или окружность) подчиняют тем же условиям, которым должна была удовлетворять замененная точка (прямая или окружность). После этого получится новая задача, которую решают способами, уже нам известными. Обыкновенно, с решением этой новой задачи предложенная задача уже будет решена сама собой, и только в редких случаях придется еще переходить к первоначальным условиям задачи. Таким образом, метод симметрии приводит решение предложенной задачи к решению новой задачи, и эта последняя должна быть или известна, или должна быть легче предложенной задачи. *Примеры.*

340. *На данной прямой AB найти точку X, соединив которую с данными точками M и N, получим углы NXB и MXA, из которых один вдвое более другого* (черт. 64).

Пусть точка X найдена так, что $\angle NXB = 2\angle MXA$ и C есть отражение M в AB. Тогда $\angle MXL = \angle CXL$, и данную задачу можно заменить следующей задачей: „даны прямая AB и точки N и C; на прямой AB найти точку X так, чтобы $\angle NXB = 2\angle CXA$“. Для решения этой новой задачи продолжим NX и будем определять ее направление. Так как $\angle CXL$ есть половина угла NXB и $\angle LXK = \angle NXB$, то $\angle KXC = \angle LXC$. Это показывает, что XC есть биссектор угла LXK (г. м. IV); след., искомая прямая NX есть касательная к окружности (C, LC). Поэтому задача решается следующим образом. Построив точку C, опишем окружность (C, LC); потом проведем из N касательную к этой окружности; эта касательная пересечет прямую AB в искомой точке. Действительно, из равенства $\triangle\triangle\, LXC$ и CXK находим: $\angle LXC = \angle CXK$; но так как $\angle NXB = \angle LXK$ и $\angle LXC = \angle MXA$, то $\angle NXB = 2\angle MXA$. Если нужно, чтобы $\angle MXA = 2\angle NXB$, то надо отразить точку N в AB.



Черт. 64.

Задача всегда возможна, если точки M и N вне прямой AB, и имеет четыре решения, так как из точки к окружности можно провести две касательных. Если точка M находится с другой стороны AB, например, в C, то решение очевидно.

341. *На прямой AB найти точку, сумма расстояний которой от двух данных точек M и N была бы наименьшая.*

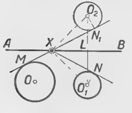
Если точка C есть отражение точки N в AB, и точка X есть искомая, то $MX + NX = MX + CX$; поэтому эту задачу можно заменить следующей задачей: „даны точки M и C по обе стороны прямой AB; на прямой AB найти точку X так, чтобы сумма $MX + CX$ была наименьшая“. Последняя задача решается непосредственно, так как кратчайшее расстояние между двумя точками есть прямая. Задача эта может быть выражена еще таким образом: „из данных точек M и N провести две секущие к прямой AB так, чтобы секущие, пересекаясь на AB, образовали с ней равные углы“. В таком виде эта задача имеет весьма большое приложение к явлениям природы. Между прочим она показывает, что звук, свет и теплота,

распространяясь от одной точки до другой посредством отражения от какой-либо плоскости, выбирают при этом самый кратчайший путь; упругие тела, отражаясь при ударе от плоскости, следуют тому же закону экономии пути и времени.

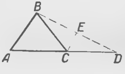
342. *На прямой AB найти точку X так, чтобы касательные, проведенные от нее к двум данным окружностям O и O_1 составили с прямой AB равные углы.*

Пусть O_2 есть отражение окружности O_1 в AB. Для определения точки X проведем касательную XN_1, и будем определять ее направление. $\triangle\triangle\, O_2XN_1$ и O_1XN равны между собой; поэтому $XN_1 = XN$ и $\angle O_2XN_1 = \angle O_1XN$. Но так как $\angle O_1XL = \angle LXO_2$, то $\angle N_1XL = \angle NXL$; следовательно, $\angle AXM = \angle N_1XL$. Отсюда следует, что линия MXN_1 есть общая касательная к окружностям O и O_2.

Последнее следствие показывает, что для решения задачи надо к окружностям O и O_2 провести общую касательную (66, II); в пересечении ее с прямой AB получится искомая точка. 4 решения.



Черт. 65.



Черт. 66.

Рассматривая решения задач 340, 341 и 342, легко заметить, что в них ломаные линии заменяются прямыми. Например, задачу 340 можно решать так: „заменим ломаную линию NXM прямой NXK и будем искать положение точки K“; точно так же решение задачи 342 можно было начать следующим образом: „заменим ломаную линию MXN прямой MXN_1 и будем искать положение точки N_1“.

Таким образом, метод симметрии приводится к спрямлению ломаных линий в прямые, так что метод симметрии можно иногда назвать методом спрямления. Последний метод состоит в том, что, предположив задачу решенной, в полученном чертеже некоторую ломаную линию заменяют прямой; затем построение искомой фигуры сводят на построение новой полученной фигуры и таким образом данную задачу заменяют новой задачей. После решения этой новой задачи обыкновенно приходится определить, в какой точке нужно согнуть выпрямленную линию, и таким образом перейти к первоначальной задаче. Особенно часто метод спрямления применим в тех задачах, условия которых содержат данную сумму или разность частей некоторой ломаной линии.

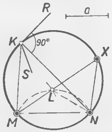
343. *Построить треугольник, зная A, c, $a+b$.*

Пусть $\triangle ABC$ (черт. 66) будет искомый. Так как сумма частей ломаной BCA известна, то выпрямляем ее. Для этого откладываем на продолжении AC часть $CD = BC$. Соединяя точки B и D, замечаем, что $\triangle BCD$ равнобедренный, и потому его вершина C лежит на перпендикуляре CE, восставленном из середины BD. Отсюда

заключаем, что надо построить угол A и на сторонах его отложить части $AB = c$ и $AD = a + b$; затем надо соединить B и D и из середины BD восставить перпендикуляр, который пересечет AD в точке C. $\triangle ABC$ есть искомый, так как в нем $\angle BAC$ и сторона AB — требуемые, сумма же $BC + AC = CD + AC = a + b$. Условие возможности построения будет $a + b > c$.

344. *Дана окружность и на ней точки M и N. Найти на ней же точку X так, чтобы $MX - NX = a$.*

Пусть точка X искомая (черт. 67). Выпрямляем ломаную MXN таким образом, чтобы получилась разность ее частей. Для этого откладываем $XL = NX$. Будем искать положение точки L. Так как $ML = a$, то точка L лежит на окружности (M, a). Далее замечаем, что $\angle MXN$, опирающийся на известную нам дугу MN, известен, и, если обозначим его через 2φ, то



Черт. 67.

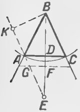
$$\angle LNX = \frac{180° - 2\varphi}{2} = 90° - \varphi, \text{ а } \angle MLN,$$

как внешний, равен $(90° - \varphi) + 2\varphi = 90° + \varphi$. Из этого следует, что точка L лежит на пересечении двух дуг — дуги (M, a) и дуги, описанной на MN и вмещающей угол $90° + \varphi$. Чтобы найти этот угол, надо соединить с M и N любую точку окружности (например, точку K) и прибавить к половине полученного угла MKN прямой угол; $\angle SKR$ — искомый. Описав указанные две дуги, в пересечении их получим точку L; соединив ее с M, продолжим ML до пересечения с окружностью в точке X. Задача имеет одно решение; условие возможности будет $MN \geqslant a$.

Когда в условии задачи дана сумма или разность отрезков, надо немедленно стараться ввести в чертеж эту сумму или разность и потом отыскивать решение; в этом и состоит основание всего метода спрямления. Примеры.

345. *Построить треугольник, зная $a + b$, $b + c$ и B.*

Пусть $\triangle DBE$ (черт. 55) построен так, что $DB + DE = s$, $DE + BE = s_1$ и $\angle DBE = \varphi$. Выпрямив ломаные линии BDE и BED, получим $BA = s$ и $BC = s_1$. $\triangle ABC$ мы построить умеем (20, I) и потому данную задачу сводим на 269, II. Если вместо сумм дана разность тех же сторон, то отрезки DA и EC надо отложить в другую сторону от D и E, и задача приведется к более простой задаче.



Черт. 68.

346. *Построить равнобедренный треугольник, зная его боковую сторону a и сумму s высоты с основанием.*

Пусть в $\triangle ABC$ (черт. 68) $AB = BC = a$, и $BD + AC = s$. Вопрос приводится к определению точки A. Введем данную сумму в чертеж. Для

этого отложим $DE = AC$; тогда, очевидно, $DE = 2AD$, и потому вид треугольника ADE известен. Если в $\angle AED$, где угодно, провести $GF \parallel AD$, то мы опять найдем $FE = 2GF$. Следовательно, для решения берем произвольно прямой $\angle GFE$, откладываем $FE = 2GF$ и $EB = s$; затем описываем дугу (B, a) до встречи с EG в точке A и с перпендикуляром AD в точке C. $\triangle ABC$ — искомый. Для возможности задачи нужно, чтобы AB была не меньше перпендикуляра BK.

Метод симметрии.

347. Из данных точек A и B провести две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой MN пополам.

348*. Даны две окружности O и O_1 и между ними прямая MN. Начертить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на MN.

349. 1) Даны прямая AB и точки M и N по одну ее сторону; на прямой AB найти точку так, чтобы разность ее расстояний до M и N была наибольшая.

2) Даны прямая AB и точки M и N по обе ее стороны; на прямой AB найти точку, разность расстояний которой до точки M и N была бы наибольшая.

3) Показать, что из всех равновеликих треугольников с общим основанием наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

350*. В данный $\angle ABC$ вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в данной внутри угла точке M.

Реш. Стороны треугольника должны составлять попарно равные углы с AB и BC (341); иначе искомый периметр можно увеличить.

351. Даны точки A и B. На прямой CD найти точку X так, чтобы разность углов BAX и ABX (или разность углов AXC и BXD) была данной величины (49, 50, I).

352. Построить треугольник, зная a, h_a и b_A (351, II).

353. Построить ромб с данной диагональю, которая лежала бы на данной прямой так, чтобы другие две вершины ромба приходились на данных двух окружностях.

354. Даны точки A, B, C и прямая CD. На этой прямой найти точку, из которой отрезки AC и CB видны под равными углами (м. с. или г. м. XII).

355. Описать окружность, касательную к прямой AB в данной точке M и пересекающую данную окружность O под данным углом m (г. м. XIV).

Реш. Отразим окружность O так, чтобы она проходила через M и касательная к ней в M пересекала AB под углом m. Тогда искомый центр будет в пересечении оси симметрии и известной прямой.

356. Даны две окружности. На внутренней к ним касательной найти точку так, чтобы сумма углов общей касательной с касательными к окружностям из искомой точки была данная (157, II).

357. Даны прямая MN и точки A и B. Если A и B по одну сторону MN, то на прямой MN найти точку X так, чтобы $\angle MXA = \angle AXB$. Если же MN идет между A и B, то найти X так, чтобы $\angle AXB = 2\angle MXA$.

358. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам. *Реш.* Если отражение B в AC есть B_1, то легко построить $\triangle B_1DC$ [1]).

Метод спрямления.

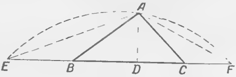
359*. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности прочих сторон.

360. 1) Найти сумму перпендикуляров, опущенных на стороны равнобедренного треугольника из точки, взятой на его основании.

2) Найти сумму перпендикуляров, опущенных на стороны равностороннего треугольника из точки, взятой на его площади.

361. 1) Найти геометрическое место точек, сумма (или разность) расстояний которых до двух данных прямых равна данной длине.

Реш. Искомое место составляет 4 отрезка, образующие прямоугольник. Продолжения тех же отрезков соответствуют разности (г. м. IV).



Черт. 69.

2) На данной прямой найти точку так, чтобы сумма (или разность) расстояний ее от сторон данного угла была данная.

362. Построить $\triangle ABC$, зная A, h_a и $2p$ (черт. 69).

Реш. Выпрямим ломаную BAC в прямую $EBCF$; тогда можно определить угол FAE и применить задачу № 121, II. К этой задаче можно привести следующую: „построить треугольник, зная угол, площадь и отношение периметра к высоте из данного угла".

363*. Дан $\triangle ABC$. Найти точку X так, чтобы четырехугольник $ABCX$ был описуемый и вписуемый.

364. 1) На окружности даны точки A и B; отыскать на ней точку X так, чтобы $AX + BX$ равнялась данной длине.

2) Данную дугу разделить на две части так, чтобы сумма полученных хорд была наибольшая.

365. Построить $\triangle ABC$, зная A, $BC - AB$ и сумму высоты BD и отрезка DC (α).

---

[1]) К этого рода задачам принадлежат весьма интересные задачи 50, 51, 118, 119, 120, 128, IV.

Реш. Выпрямим ломаную BDC в прямую CDE и на BA отложим данную разность AF. Тогда можно построить CE где-нибудь, а через F провести прямую, параллельную CE. Так как $\angle BEC = 45°$ и $BF = BC$, то можно найти точку B (267, II), а затем найдем точку A.

366. Дан $\angle ABC$ и точка D. На стороне AB найти точку так, чтобы сумма или разность ее расстояний до BC и точки D была равна данной длине (267, II).

367. Построить $\triangle ABC$, зная B, BC и разность стороны AC и высоты AD (α).

Реш. Отложим AC на AD так, что DE равно данной разности. Проведя $EF \parallel BC$, можем определить точку A (267, II).

368*. В данную окружность вписать прямоугольник, зная разность основания и n-ой части высоты.

369. Построить треугольник, зная a, $B - C$ и $b \pm c$ (44, I).

370. Провести окружность, касательную к двум данным окружностям так, чтобы радиусы, проведенные из искомого центра к точкам касания, образовали данный угол (344, II).

371. Построить $\triangle ABC$, зная A, b и $na \pm c = s$, где n — какое-нибудь число (α).

Реш. Отложим $ABB_1 = s$ и определим точку B (г. м. XII).

372*. Построить равнобедренный треугольник, зная основание a и сумму боковых сторон с высотой h_a.

373. Вписать в треугольник (или сегмент) параллелограм с данным углом и периметром (α, 264, II).

374. Построить треугольник, зная $m_a + a$, $\angle(m_a, a)$ и b (346, II).

374. Построить треугольник, зная A, m_b и $b + c$.

Реш. На продолжении CA отложим до D половину b. Можно построить $\triangle DBE$.

375. В окружность или сегмент вписать прямоугольник, зная разность между его периметром и высотой.

376. Построить треугольник, зная A, $b + c$ и $a + c$ (α).

Реш. Выпрямим ломаную ABC в прямую ABE и, отложив на продолжении CA отрезок $AD = c$, проведем $EF \parallel AC$ до встречи с BD в точке G; $\angle\angle BDA$ и AEG известны (267, II).

377. Построить равнобедренный треугольник по данным периметру и высоте на неравную сторону.

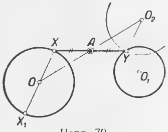
378. В угле B треугольника ABC провести в известном направлении отрезок XY так, чтобы $AX \pm CY$ была данной длины.

379*. Начертить равнобедренный $\triangle ABC$ ($AB = BC$) так, чтобы периметр всякого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на AC, был равен данной длине.

Метод параллельного перенесения.

Часто построение фигуры становится затруднительным только от того, что части этой фигуры слишком удалены друг от друга,

и потому трудно ввести в чертеж данные. В этих случаях какую-нибудь часть искомой фигуры переносят или параллельно самой себе, или другим образом, но на такое расстояние, чтобы вновь полученная фигура могла быть построена или непосредственно, или легче, чем искомая фигура. Направление такого перенесения зависит от условий задачи и должно быть выбрано так, чтобы во вновь полученную фигуру вошло, по возможности, большее количество данных.

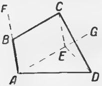


Черт. 70.

Когда построим вновь полученную фигуру, надо сделать обратное перенесение, и тогда получится искомая фигура. Примеры.

380. *Между двумя окружностями провести отрезок XY, делящийся пополам в данной точке A* (черт. 70).

Продолжим XO до X_1 и перенесем окружность O параллельно в O_2, двигая ее центр по прямой OA, так, чтобы X_1 совместилась с Y. Тогда O придет в известную точку O_2 ($AO_2 = AO$), и для решения задачи надо на продолжении OA отложить $AO_2 = AO$ и описать окружность (O_2, OX). Полученные точки пересечения Y и Y_1 надо соединить с A. Два, одно или ни одного решения. Если вместо равенства отрезков AX и AY дано их отношение, то точка O_2 определится с помощью 17, I. Конечно, окружность O_1 можно заменить данной прямой.



Черт. 71.

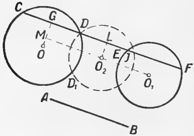
381. *Построить четырехугольник, зная его углы и две противоположные стороны* (черт. 71).

Положим, что в четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD и углы A, B, C имеют данные значения. Перенесем BC параллельно самой себе в AE. Тогда составится $\triangle AED$, в котором известны две стороны AE и AD и $\angle EAD$, равный разности двух известных углов, данного $\angle BAD$ и $\angle FBC$, смежного с данным $\angle CBA$. Такой треугольник легко построить. Затем легко провести прямые EC и CD, потому что первая образует известный угол с прямой EA ($\angle CEG = \angle FBC$); а вторая образует известный $\angle CDA$ со стороной AD. После этого остается только провести $CB \parallel EA$ и решение очевидно. Так как эта задача имеет только одно решение, то заключаем: углы и отношение двух противоположных сторон четырехугольника вполне определяют его вид. Такого рода заключения нередко имеют очень важное значение, потому что их иногда трудно получить другим способом [1]).

382. *Даны две окружности O и O_1 и прямая AB. Параллельно прямой AB провести секущую, образующую в данных окружностях хорды, сумма которых равняется данному отрезку s* (черт. 72).

[1]) См., напр., №№ 112 и 113, IV.

Пусть $CF \parallel AB$ и $CD + EF = s$. Перенесем окружность O_1 так, чтобы CD и EF составили один отрезок $CJ = s$. Вопрос приводится к определению точки O_2. Опустив $OG \perp CD$ и $O_2L \perp DJ$, находим



Черт. 72.

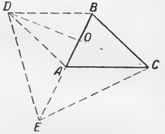
$$GL = \frac{s}{2}.$$

Так как $O_1M \parallel AB$, то задача решается следующим образом. Проведя $O_1M \parallel AB$, опустим $OM \perp O_1M$, на MO_1 отложим часть MO_2, равную половине s, и опишем окружность (O_2, O_1F). Эта окружность встретит окружность O в точках D и D_1. Искомые секущие проходят через D и D_1 и параллельны AB.

Для построения треугольников и четырехугольников весьма важно знать свойства фигур, образованных параллельным перенесением их сторон. Эти свойства почти исчерпываются следующими двумя задачами.

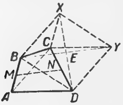
383. *Перенесение сторон треугольника* (черт. 73).

В $\triangle ABC$ перенесем CA в BD и на продолжении AB отложим $AE = AB$; тогда составится $\triangle CDE$. Показать, что в $\triangle CDE$: 1) стороны вдвое более медиан треугольника ABC; 2) площадь $\triangle CDE$ втрое более площади $\triangle ABC$; 3) две высоты каждого из $\triangle\triangle ADE$, AEC и ADC равны высотам $\triangle ABC$; 4) углы при точке A равны внутренним или внешним углам треугольника ABC и углы между медианами треугольника ABC равны углам треугольника DEC; 5) AD, AC и EO суть медианы треугольника EDC (79, I). Когда условия задачи позволяют построить $\triangle DEC$ или один из малых треугольников, то от этих треугольников с помощью обратного перенесения легко перейти к $\triangle ABC$.



Черт. 73.

384. *Перенесение сторон четырехугольника* (черт. 74).



Черт. 74.

В данном четырехугольнике $ABCD$ перенесем параллельно AB и AD в CX и CY. Параллелограм $BXYD$ обладает следующими свойствами:

1) Стороны и угол параллелограма равны диагоналям и углу между ними в фигуре $ABCD$.

2) Углы BCX, XCY, YCD равны углам B, A и D данной фигуры.

3) $\angle\angle XCD$ и BCY равны углам между противоположными сторонами AB и CD, BC и AD.

4) Площадь параллелограма вдвое более площади четырехугольника.

5) Расстояния точки C от вершин параллелограма равны сторонам четырехугольника.

6) Диагонали параллелограма вдвое более отрезков, делящих пополам AB и CD, BC и AD; угол между диагоналями равен углу между теми же отрезками.

7) Для некоторых четырехугольников (?) линия BCY выпрямляется.

Весьма многочисленный класс задач на построение четырехугольников решается с помощью построения параллелограма $BXYD$. В задачах такого рода одни из данных дают возможность построить этот параллелограм, а другие данные определяют точку C (чаще всего C есть пересечение двух геометрических мест) и дают возможность от фигуры $BXYD$ перейти к фигуре $ABCD$ с помощью обратного параллельного перенесения. Пример.

385. *Построить четырехугольник, зная его стороны и отрезок, делящий две противоположные стороны пополам.*

Пусть фигура $ABCD$ есть искомая, и отрезок MN равен данной длине. Сделав общее параллельное перенесение (черт. 74) замечаем, что $BY = 2MN$, и потому можно построить $\triangle BCY$ (18, I) и определить середину E стороны BY. Так как X и D лежат на известных окружностях (C — центр, AB и CD — радиусы), то легко провести DX (380, II). Построив параллелограм $BXYD$, перенесем обратно XC в BA и получим требуемое[1]).

Мы видим, что построение четырехугольника приводится к построению параллелограма. Но если это так, то должны быть задачи, в которых построение параллелограма $BXYD$ приводится к построению основного четырехугольника $ABCD$. Такой класс задач, действительно, существует. Например:

386. *Даны четыре прямые, выходящие из точки С. Начертить параллелограм данной площади так, чтобы его вершины лежали на данных прямых и чтобы отношение расстояний двух несмежных вершин до точки С было данное.*

Пусть фигура $BXYD$ будет искомая (черт. 74), так что ее площадь и отношение $CX:CD$ имеют данные значения. Перенесем параллельно CX в AB; CY перейдет в AD. В фигуре $ABCD$ известны углы и отношение сторон $AB:CD$. Этих данных достаточно, чтобы построить фигуру, подобную фигуре $ABCD$ (381, II).

Поэтому задача решается следующим образом. Построим фигуру $abcd$, подобную фигуре $ABCD$ (381, II). Пусть k^2 будет ее площадь, а $k_1{}^2$ — площадь половины параллелограма $BXYD$. Тогда фигуру $abcd$ надо умножить на $(k_1:k)$. Получим фигуру $ABCD$ (271, II). Остается AB перенести в CX и AD в CY.

Другие примеры подобных задач, на первый раз поражающих своей трудностью, но решающихся довольно легко, можно найти в 500, II и 162, IV.

[1]) Эта задача очень изящно решается перенесением BC и AD в M (82, I).

Относительно направления параллельного перенесения надо помнить следующие приемы.

λ) Совмещение равных линий и углов. Если данные или искомые неравны, и отношение их известно, то для совмещения сначала умножают их так, чтобы они стали равны, а потом накладывают друг на друга[1]). Примеры: 404, 456, 453, 464, II и 119, IV.

μ) Введение в построение данных (произведения, суммы или разности сторон, углов, площади фигуры). Примеры: 390, 438, 439, 442, 455, 451, 454, 458, 463.

ν) Соединение данных частей в положение, удобное для построения, смотря по свойству данных. Примеры: 437, 441, 439, 460, II и 127, IV.

Задачи на параллельное перенесение.

387. Через данную точку провести прямую так, чтобы сумма (или разность) расстояний ее от двух других данных точек была равна данной длине.

388*. Построить трапецию, зная все ее стороны (18, I).

389. Построить четырехугольник, зная три стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.

390*. Через две точки, данные на окружности, провести две параллельные хорды, сумма или разность которых была бы данная (μ).

391. Даны три параллельные и где-нибудь точка M; провести через M секущую так, чтобы разность отрезков между параллелями была данная (3, II).

392*. Даны три прямые. В известном направлении провести секущую так, чтобы разность полученных отрезков была данная.

393. Даны две параллельные AB и CD, секущая EF и точка M. Провести секущую $MXYZ$ (X, Y, Z суть точки встречи искомой прямой с данными прямыми EF, AB, CD) так, чтобы отношение $MX:YZ$ было данное.

394*. На окружности даны две точки A и B. В данном направлении провести хорду XY так, чтобы сумма или разность хорд AX и BY (или дуг AX и BY) была данной величины (364, II).

395. В данном направлении провести между двумя окружностями (или между прямой и окружностью) отрезок данной длины.

Реш. Перенесем одну из окружностей. Задача эта дает возможность решить многочисленный класс задач.

---

[1]) Этот прием часто заменяет метод симметрии и спрямления, как показывают задачи 354, 357, 358, 367, II. Методы симметрии и спрямления вообще суть частные случаи метода перенесения. Прием наложения равных или умноженных неравных состоит в исключении неизвестных и употребляется во всех частях математики. В алгебре и тригонометрии он состоит в исключении неизвестного из уравнений помощью сравнения коэффициентов. Примеры употребления того же приема в арифметике можно найти в моем сочинении „Методы арифметических задач“, изд. 5-е, 1902 г., Москва.

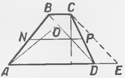
396. Построить четырехугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными сторонами (395, II).

397. Построить четырехугольник, зная его диагонали, две противоположные стороны и угол между ними.

398. С корабля видны под известным углом два маяка, расстояние которых известно; когда же корабль в известном направлении прошел к этим маякам известное расстояние, то они стали видны под иным данным углом. Определить место корабля (г. м. V, 395, II).

399. Построить трапецию $ABCD$, зная CD, угол между диагоналями, расстояние параллельных сторон и отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (черт. 75).

400. Через данную точку провести прямую, на которой две пары данных параллельных прямых отсекают отрезки, находящиеся в данном отношении (γ).



Черт. 75.

Реш. Умножим расстояние между данными параллелями одной пары на данное отношение и искомый отрезок перенесем в вершину параллелограма пересечения данных прямых (3, II).

401. Даны пять точек. Через первую точку провести прямую так, чтобы сумма ее расстояний от 2-й и 3-й точки была больше или меньше суммы расстояний от 4-й и 5-й точки на данную длину (искомая прямая находится по одну сторону всех 4 точек).

402. Даны две точки A и B и между ними две параллели MN и PQ; провести между последними в известном направлении отрезок CD так, чтобы сумма $AC+CD+BD$ была наименьшая.

Реш. Перенесем MN, PQ и BD так, чтобы PQ прошла через B, а точка B, двигаясь параллельно CD, пришла на новое положение MN.

403. В окружности даны хорды AB и CD. Отыскать на окружности такую точку X, чтобы прямые AX и BX определили на CD отрезок данной длины.

404. Через данную точку A провести к окружностям O и O_1 секущую, определяющую в окружностях равные отрезки (λ).

Реш. Перенесем O_1 в O_2 так, чтобы равные отрезки секущей совпали. Тогда можно найти O_2, замечая, что $\angle OO_2O_1 = 90^\circ$, и что длина AO_2 известна. В самом деле, если AB и AC суть касательные к окружностям O и O_2, то $AB=AC$, и $\triangle ACO_2$ можно определить отдельным построением (20, I).

Если искомые отрезки должны находиться в данном отношении, то надо одну окружность умножить относительно A на данное отношение.

405. Начертить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре данные точки.

406. Даны два угла BAC и DEF. В данном направлении провести прямую, отрезки которой в углах имеют данное отношение.

Реш. GH и IK — искомые отрезки. Перенесем параллельно $\triangle IEK$ так, чтобы I совпала с H, а EK пришла в LM. Тогда форма фигуры $GALM$ станет известна, и можно найти точку L; A — центр подобия.

407. Даны два угла. В известном направлении провести секущую так, чтобы сумма (или разность) полученных в углах отрезков была данная.

408. В $\triangle ABC$ провести определенной длины отрезок DE (D на стороне AB, E — на BC) так, чтобы отношение $AD:CE$ было данное.

Реш. Перенесем DE в AE_1; тогда вид $\triangle E_1EC$ будет известен, а потому будет известно геометрическое место точки E_1.

409. Построить трапецию $ABCD$, зная диагонали и непараллельные стороны.

Реш. Перенесем параллельно AC в BA_1 и CD в BD_1; тогда задача приведется к следующей задаче:

410. Даны 4 концентрические окружности; провести секущую так, чтобы $AB = CD$ (A, B, C и D суть точки встречи окружностей и секущей, начиная с большей окружности; 98, I, γ).

411. В окружности даны хорды CD и AB и точка E на хорде CD. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX определили на CD отрезки EY и EZ, находящиеся в данном отношении.

Реш. Пусть Y и Z — по одну сторону E. Перенесем параллельно AY, сделав умножение, в точку Z; тогда AY встретит AE в точке A_1, положение которой известно, так как дано отношение $AE:A_1E$; $\angle A_1ZB$ также известен (г. м. V). Если же Y и Z — по обе стороны точки E, то, сделав то же построение, надо Z перенести симметрично относительно точки E.

412. Построить $\triangle ABC$, зная B и медианы AE и CD.

Реш. Перенесем CB в AD_1; $\triangle D_1AD$ можно построить, так как известно расстояние A от точки, делящей DD_1 в отношении $2:1$. Построение нужно начать с $DD_1 = CD$ (г. м. V, 79, I).

413. Даны точки A и B и две окружности O и O_1. Провести параллельные радиусы OX и O_1Y так, чтобы $\angle\angle XAO$ и YBO_1 были равны.

Реш. Умножим $\triangle XAO$ на отношение радиусов (черт. 80); полученный $\triangle X_1A_1O$ перенесем параллельно в положение YCO_1. Точка A_1 перейдет в C, которую легко найти, так как длина O_1C и $\angle CO_1O$ известны. Точка Y определится г. м. V.

Перенесение сторон треугольника (383, II).

Построить треугольник, зная:

414. m_a, m_b, m_c ($\triangle DEC$, $EA = 2AO$).

415. m_b, m_c, h_a (определим $\angle EDA$, затем найдем положение BC и точки C).

416. h_a, h_b, m_c ($\triangle DAC$, 131, II). **417.** m_a, m_c, $\angle(m_b, a)$.

418. m_a, h_a, $h_b:b$.

Реш. В $\triangle ECB$ можно построить $\angle ECB$; умножим AC на 2 и перенесем параллельно в EH; тогда можно построить $\triangle ECH$ (м. п., 104, I).

419. a, h_a и $\angle(m_b, c)$. **420.** h_a, h_b и $\angle(b, m_a)$.

Реш. В известном $\angle ECA$ определим E, затем весь $\triangle EAC$ (58, II).

421. $\angle(m_a, m_b)$, $\angle(m_a, m_c)$ и $S(\triangle DEC$, м. п.).

422. B, m_b и m_c ($\triangle EDO$, м. п., г. м. XII).

423. m_a, m_c, S (194, II, $\triangle EDC$).

Перенесение сторон четырехугольника (384, II).

424. Построить четырехугольник, зная две диагонали, угол между ними и две какие-либо стороны.

425. Построить четырехугольник, зная площадь, угол между диагоналями, отношение отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, и два какие-либо угла.

426. Построить четырехугольник, зная диагонали, отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, и два противоположных угла.

427*. Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и одну из сторон.

428. Построить вписываемый четырехугольник, зная два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, угол между диагоналями и угол между диагональю и одной стороной.

Реш. Угол BCY известен, так как $\angle BCA = \angle BDA$.

429. Построить четырехугольник, зная диагонали, один угол, отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, и сумму (или разность) квадратов двух сторон. (Для определения C служат г. м. V, X и XI.)

430*. Построить трапецию, зная диагонали и параллельные стороны.

431. Построить четырехугольник, зная две противоположные стороны, угол между ними, отношение диагоналей и угол между ними ($\triangle YCB$, г. м. XII и V).

432. Построить четырехугольник, зная площадь, отношение и угол двух противоположных сторон, отношение диагоналей и угол одной диагонали с какой-либо стороной.

Реш. Вид треугольников YCB и BXY известен (г. м. XII и V); стало быть, вид фигуры $DBXY$ также известен; затем эту фигуру умножаем и делаем перенесение. Задачи такого рода варьируются сколько угодно.

433. Построить четырехугольник, зная его площадь, отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон, и два противоположных угла (194, II).

434. Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и разность смежных двух сторон.

435. Построить четырехугольник, зная AB, BC и AD, угол между сторонами AB и CD и отрезок EF, делящий в известном отношении стороны AB и CD.

Реш. Перенесем BC и AD параллельно в EC_1 и ED_1; тогда (82, I) можно построить $\triangle EC_1D_1$ (г. м. XII, γ и далее 380, II). Вместо стороны AB могло быть дано $AB:CD$.

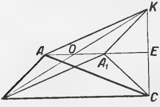
436. Построить четырехугольник, зная отношение трех сторон, площадь, отношение и угол между отрезками, соединяющими середины противоположных сторон.

437. Дана прямая и на ней точка E. Построить параллелограм $ABCD$ с данными сторонами так, чтобы диагональ AC лежала на данной прямой, и расстояния точки E от вершин B и D были данной величины (ν).

Реш. Перенесем BE в AE_1; тогда E_1D параллельна EC (409, II).

Метод вращения около оси.

Совмещение равных углов и линий, введение в чертеж данных и сближение различных частей фигуры иногда не может быть совершено параллельным перенесением. В таком случае нередко можно достигнуть цели вращением фигуры около оси. Например:



Черт. 76.

438. *Построить треугольник, зная* b, c *и* $B-C$.

Реш. Чтобы ввести в чертеж $B-C$ (черт. 76), надо наложить угол C на угол B. С этой целью повернем $\triangle BAC$ на 180° около оси, делящей BC пополам и к ней перпендикулярной; $\triangle BAC$ примет положение $\triangle BA_1C$. В треугольнике ABA_1 известны две стороны и угол между ними, так что его легко построить. Начертив $\triangle ABA_1$, опишем дуги (A, AC) и (A_1, A_1C).

Иногда вращение около оси приходится применять несколько раз, или соединять его с параллельным перенесением. Пример.

439. *Построить треугольник, зная* a, h_a и $B-C$.

Реш. Повернем $\triangle BAC$ (черт. 76) в положение BA_1C так же, как в предыдущей задаче. Разность $B-C=\angle ABA_1$ и введена в чертеж; остается связать этот угол с основанием. Для этого $\triangle ACA_1$ повернем около оси AA_1 в положение AKA_1 (другими словами — перенесем параллельно BA и BA_1 в A_1K и AK). Очевидно $\angle BAK=180°-(B-C)$. Так как EC в $\triangle ACA_1$ при повертывании переместится в EK, то $\angle AEK$, а следовательно и $\angle BCK$ — прямой, и $KC=2h_a$. Таким образом в $\triangle BCK$ известны два катета. Построив его, проведем из середины CK параллель BC, а на KB опишем дугу, вмещающую угол, равный $180°-(B-C)$.

Решение всех задач подобного рода можно найти методом симметрии потому, что при вращении около оси всякая точка перемещается в симметричную ей точку. Что же касается выбора оси и направления вращения, то при этом надо иметь в виду приемы λ, μ и ν (стр. 84).

440. Построить треугольник, зная a, $B-C$ и b^2-c^2.

441. В $\triangle ABC$ вписать полуокружность, касательную к BC в данной точке D так, чтобы концы диаметра EF пришлись на AB и AC (ν).

Реш. Повернем $\triangle EDF$ в положение EDF_1 (81, I и 293, II).

442. Построить треугольник, зная $a+c$, $A-C$ и разность отрезков, определенных на основании высотой BD (μ, 364, II).

Вместо $a+c$ можно было дать m_b, h_b, $a-c$, $a:c$, $a^2 \pm c^2$ и т. д.

443*. Построить фигуру $ABCD$, зная AC, делящую угол A пополам, $AD-AB$, DC и BC (λ).

444. Построить $\triangle ABC$, зная bc, $B-C$ и h_a.

Реш. Известна площадь $\triangle ABA_1$ (черт. 76). Можно определить его основание (212 и 194, II).

445*. Построить $\triangle ABC$, зная h_a, R и $B-C$ (90, I).

446. Дана точка A, прямая MN и на ней точка E. Провести отрезки AB и AC (B и C на MN) так, чтобы $\angle BAC$ был данной величины и середина BC пришлась в E (μ, 439, II).

447. Построить треугольник, зная A, m_a и $b \pm c$.

448. Построить треугольник, зная ac, m_b и $A-C$ (μ).

449. Построить $\triangle ABC$, зная A, h_a и m_a (черт. 76).

450. Провести окружность, пересекающую данные две концентрические окружности под данными углами (438, II).

451. 1) Даны две окружности O и O_1; провести через O и O_1 окружность, встречающую данные окружности в A и B (по одну сторону OO_1), так, что разность углов AOO_1 и BO_1O равна данной величине (μ).

Реш. Повернем $\triangle BO_1O$ в положение O_1OB_1; $\triangle AOB_1$ легко построить.

2) Решить предыдущую задачу, если точки A и B лежат по обе стороны OO_1 и вместо разности дана сумма тех же углов.

452. Даны две параллели и на них по точке A и B. Между ними провести данной длины отрезок XY так, чтобы $\angle AXB = 2\angle AYB$.

Реш. Повернем AB в симметричное положение XZ. Построив $\triangle ZXY$ где-нибудь, легко определить точку, отвечающую середине отрезка AY.

453. Построить четырехугольник $ABCD$, зная AB, AD, $D-B$ и $\angle BCA$, так, чтобы угол A делился пополам диагональю AC.

Реш. Повернем $\triangle ADC$; D придет на AB и можно найти C.

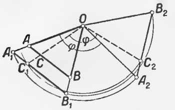
454. Построить $\triangle ABC$, зная b, h_b и $B+A-C$ (45, I).

Вместо h_b можно дать S, r, R и т. д.

Метод вращения около точки.

Имеем отрезок AB и точку O (черт. 77); умножив AB на n относительно O, получим отрезок A_1B_1 ($A_1O:AO=n$); затем повернем $\triangle A_1OB_1$ так, чтобы он принял положение $\triangle A_2OB_2$ и чтобы $\angle A_1OA_2$ был равен данному углу φ. Тогда говорят, что отрезок A_2B_2 есть отрезок AB, умноженный на n относительно O и повернутый около O на угол φ. Точка O называется центром вращения. При таком вращении произвольная точка C отрезка AB преобразуется в точку C_2; точки C и C_2 называются соответственными. Упомянутое

преобразование AB в A_2B_2 можно произвести проще. Стоит только преобразовать одну точку отрезка AB в соответственную; для этого нужно взять какую-нибудь точку C, умножить ее на n, отложить $\angle C_1OC_2 = \varphi$ и затем построить $\angle OC_2B_2 = \angle OCB$ — тогда получится прямая A_2B_2, но не по величине, как в первом преобразовании, а только по направлению. Подобным образом, чтобы повернуть окружность около какого-нибудь центра вращения на данный угол, достаточно повернуть на этот угол одну ее точку и центр.



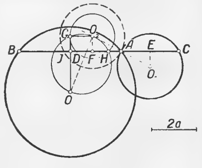
Черт. 77.

Положим теперь, что точка O неизвестна и требуется перевести отрезок AB в положение A_2B_2 так, чтобы точки A и B переместились в A_2 и B_2. Тогда надо произвести вращение AB на угол, равный одному из углов между AB и A_2B_2. Для того, чтобы определить центр вращения, надо на отрезках AA_2 и BB_2 описать дуги, вмещающие угол, равный углу вращения. Это замечание позволяет решать задачи, в которых неизвестен центр вращения.

Задачи на вращение около точки можно разделить на три группы.

Первая группа. В задачах этой группы вращение имеет тот же характер, как и параллельное перенесение, т. е. оно сближает части фигуры в положение, удобное для построения (ν), вводит в чертеж данные (μ), совмещает равные или неравные углы и линии (λ) и вообще сводит данную задачу на другую. В задачах этого рода центр вращения непосредственно известен. Примеры.

455*. *Через точку пересечения A окружностей O и O_1 провести секущую BAC так, чтобы разность хорд $BA - AC = 2a$.*



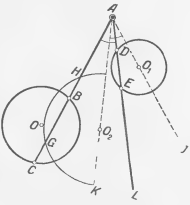
Черт. 78.

Чтобы ввести в чертеж 78 данную разность, повернем около точки A окружность O_1 в положение O_2 так, чтобы хорда AC приняла положение AJ; проведем $OD \perp AB$ и $O_2F \perp AJ$. Тогда $DF = a$. Пусть $O_2G \parallel DF$; тогда $O_2G = DF = a$. Следовательно, можно построить $\triangle O_2GO$ и определить направление прямой OD или O_2G.

Поэтому приходим к следующему решению. На продолжении AO_1 отложим $AO_2 = AO_1$ и на прямой OO_2 построим окружность, как на диаметре; опишем дугу (O_2, a) до встречи с окружностью в точках G и H. Искомые секущие будут $AB \perp OG$ и $AB_1 \perp OH$. Действительно, хорда $AJ = AC$, так как $AF = AE$ из равенства $\triangle\triangle\, AO_2F$ и AO_1E; значит, $AB - AC = 2(AD - AF) = 2DF$; но $DF = O_2G = a$, следовательно, $AB - AC = 2a$.

456. *Даны две окружности, O и O_1 и точка A. Провести к окружностям две секущие ABC и ADE* (черт. 79) *так, чтобы хорды BC и DE были в данном отношении и пересекались под данным углом* (λ).

Реш. Умножим окружность O_1 на данное отношение (на чертеже оно равно 2) относительно точки A и повернем ее около A на данный угол. Тогда хорда DE преобразуется в хорду GH, которая равна BC и лежит с BC на одной прямой. Поэтому задача приведена к 404, II.



Черт. 79.

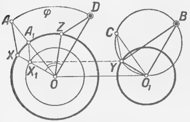
Иногда вращение около точки соединяется вместе с параллельным перенесением. Например:

457. *Даны точки D и B и две окружности O и O_1. Провести радиусы O_1Y и OZ так, чтобы они, пересекаясь под данным углом φ, давали равные углы зрения ZDO и YBO_1* (черт. 80).

Реш. $\triangle DZO$ повернем около точки O на угол φ в положение $\triangle AXO$; тогда точка D перейдет в точку A, которую легко найти, а радиус OZ переместится в $OX \parallel O_1Y$ (413, II).

458. *Построить вписываемый четырехугольник, зная его стороны a, b, c и d.*

Если фигура $ABCD$ искомая ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$), то $\angle ABC + \angle ADC = 2d$. Чтобы воспользоваться этим, надо приложить $\triangle ABC$ к $\triangle ACD$ так, чтобы углы B и D оказались смежными. Но так как AB не равна AD, то сначала умножим $\triangle ABC$ на $d \cdot a$; после этого повернем $\triangle ABC$ около A на угол A. Тогда AB и AD совместятся, а точка C придет на продолжение CD в точку C_1. В $\triangle CAC_1$ известны $CD = c$, $DC_1 = \frac{b \cdot d}{a}$, $AD = d$ и $AC : AC_1 = a : d$. Такой треугольник легко построить (г. м. XII и I).



Черт. 80.

459. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны и сумму (или разность) B и D (458, II).

460. В данную окружность вписать четырехугольник $ABCD$, зная AB, CD и $BC + AD$ (v).

Реш. Переменим местами сегменты BC и CD (364, II). Вместо суммы двух сторон можно дать их разность, отношение, сумму

или разность квадратов, произведение (344, 125, II, г. м. X и XI, 146, II).

461. В данную окружность вписать фигуру $ABCDEF$, зная AF, CB, $DC+DE$, $AB+EF$ и угол между CE и AF (394, II).

462. Построить четырехугольник, зная AB, AD, B и D, если в него можно вписать окружность (ν).

Реш. Повернем $\triangle ADC$ в положение AD_1C_1 так, чтобы AD_1 лежала на AB и D_1C_1 была касательная (19, I и 112, II).

463. Построить четырехугольник, зная AB, AD, $BC:CD$, B и D.

Реш. Умножив $\triangle ACD$ на данное отношение, повернем его около C на $\angle BCD$; A перейдет в A_1, и можно построить $\triangle AA_1B$. Точка C найдется с помощью г. м. XII.

464. В $\triangle ABC$ провести через B прямую так, чтобы проекции AB и BC на эту прямую образовали $\triangle\triangle ABD$ и CBE, площади которых находятся в данном отношении (λ).

Реш. Умножим $\triangle ABC$ на $BC:AB$ и повернем его на угол B около точки B; тогда точка D перейдет в точку E_1; $\angle EBE_1 = B$, точки же B, E, E_1 и C лежат на определенной окружности, и потому задача приводится к 182, II.

465. К двум окружностям провести в данном направлении секущую, определяющую две хорды, разность которых была бы данная (455, II).

466. Через точку пересечения двух данных окружностей провести секущую так, чтобы разность полученных хорд, умноженных соответственно на данные числа m и n, была данная.

Реш. После умножения одной окружности на $m:n$ относительно точки встречи окружностей пользуемся 455, II.

467. Найти точку, касательные из которой к двум данным окружностям образуют данный угол, причем одна касательная должна быть данной длины (ν).

Реш. Определив какую-либо точку, касательная из которой к одной окружности будет данной длины, повернем вторую окружность около первого центра так, чтобы касательные из той же точки образовали данный угол (г. м. VII).

468*. Дана окружность O и точки B и C. Провести радиус OX так, чтобы разность углов XCO и XBO была данная (469, II).

469. Даны две концентрические окружности и точка B. Найти на окружностях по точке X и Y так, чтобы длина YX и $\angle YBX$ были данной величины.

470. Даны две окружности O и O_1 и две точки D и B. Провести радиусы OZ и O_1Y так, чтобы угол между ними, а также разность углов ODZ и O_1BY были данной величины (468, II, черт. 80).

471. Даны окружность и две точки, A и B. Провести к окружности касательную так, чтобы расстояния точки A до этой касательной и до перпендикуляра, опущенного на касательную из B, были в данном отношении.

Реш. Умножим окружность и повернем ее около A на 90°. Тогда искомая касательная пройдет через B. Вместо перпендикуляров из A

могли быть даны прямые, встречающие касательную и перпендикуляр из B под какими-либо данными углами.

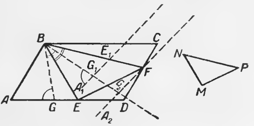
472. Построить четырехугольник $ABCD$, зная $AB:AD$, $B-D$, AC, BC и разность углов BAC и DAC (μ).

Реш. $\triangle ADC$ обернем около оси, делящей CAD пополам, умножим на $AB:AD$ и повернем около точки A на угол BAC. После этого точка D переместится в B, а точка C — в точку C_1. Можно построить $\triangle ACC_1$, а затем $\triangle C_1BC$. Редкий пример на соединение вращений около оси и около точки. Вот еще пример.

473. На окружности даны точки A и B. Провести хорду XY так, чтобы отношение $AX:AY$ и разность углов XAB и YAB были данной величины.

Вторая группа. В задачах этой группы при данных центре, угле и отношении вращения требуется отыскать две соответственные точки, лежащие на данных прямых или окружностях. Очевидно, если умножить и повернуть прямую (или окружность) на данный угол, то она встретит другую прямую (или окружность) в искомой точке. Например:

474. *В данный параллелограм $ABCD$ вписать $\triangle EBF$, подобный данному $\triangle MNP$* (черт. 81). Пусть отношение $NP:NM=n$, $\angle MNP=\varphi$ и $\triangle EBF$ — искомый. Повернем AD около B на угол φ в направлении от A к C; тогда точка E придет на BF в E_1; если, кроме того, отрезок AD умножим на n (B — центр подобия), то точка E_1 придет в F. Из этого выходит следующее решение. Надо повернуть AD на угол φ около B и умножить ее на n. Для этого возьмем произвольный отрезок BG, построим $\angle GBG_1$, равный углу φ, отложим $BG_1=BG$ и построим $\angle BG_1A_1$, равный углу BGA; получится прямая A_1G_1. Затем на BG_1 определим точку G_2 так, чтобы $BG_2:BG_1=n$, и проведем $A_2G_2 \parallel A_1G_1$. Прямая A_2G_2 встретит CD в точке F. После того останется на AD найти точку, соответственную точке F; для этого построим $\angle FBE$, равный углу φ.



Черт. 81.

475. Даны две окружности, O и O_1, и точка A. Построить треугольник известного вида так, чтобы одна его вершина лежала в A, а другие две — на окружностях.

476. Дана точка A и два отрезка BC и ED. Найти $\triangle AMN$ известного вида так, чтобы углы BMC и END имели данную величину (475, II).

477. Вписать в параллелограм новый параллелограм с данными: отношением сторон и углом диагоналей.

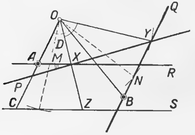
Реш. Отношение и угол определяют вид искомой фигуры; общий центр параллелограмов примем за центр вращения.

478. Даны две окружности (или две прямые) и две точки, A и B. Найти на окружностях по точке X и Y так, чтобы отношение $AX:AY$ и разность углов XAB и YAB были данной величины.

479*. Через точку пересечения двух окружностей провести две хорды (одну — в одной, другую — в другой окружности) так, чтобы угол и отношение между ними были данной величины.

Вместо отношения хорд можно дать их сумму, разность или произведение (136, 455, II и м. п.).

Третья группа. В задачах этой группы даны две линии и на каждой из них по соответственной точке; требуется определить на тех же линиях по новой соответственной точке так, чтобы они удовлетворяли каким-либо условиям; центр вращения неизвестен. Допустим, что имеется достаточно данных для совмещения данных линий и искомых точек. Тогда можно определить центр вращения. Останется заметить зависимость между данными, искомыми и центром вращения. Эта зависимость даст указание на решение задачи. Например:



Черт. 82.

480. *Даны две прямые, AR и BQ, и на них по точке, A и B. Провести в известном направлении секущую XY так, чтобы отношение $AX:BY$ было данное* (черт. 82).

Реш. Определим центр вращения O, принимая точки A и B, X и Y за соответственные [1]). Тогда отрезок BY можно перевести сначала в CZ, а потом в AX. Из подобия треугольников AOB и XOY видим, что $\angle OXY = \angle OAB$; а так как углы OAB и AXP известны, то и $\angle AXO$ известен. Поэтому для решения задачи надо на прямой AO описать дугу, вмещающую известный нам угол.

Если вместо направления секущей XY дана ее длина, то можно построить $\triangle XOY$ (γ). Наконец, если вместо длины XY дана точка P, через которую должна проходить секущая XY, то делается известным $\angle AXP$.

Последняя задача находится в книге «De sectione rationis» знаменитого греческого геометра Аполлония (III столетие до начала нашей эры).

481. *Даны две окружности и на них по точке, A и B. Через данную точку C провести секущую XY так, чтобы дуги AX и BY имели равное число градусов* (черт. 83).

Реш. Определим центр вращения P так, чтобы при совмещении окружностей точки A и X пришли в B и Y [2]). Тогда $\triangle XPY \backsim \triangle APB$

---

[1]) Для этого возьмем произвольные точки M и N так, чтобы $AM:BN$ имело данное значение, и на AB и MN опишем дуги, вмещающие угол, равный углу вращения.

[2]) Для этого надо взять два равных центральных угла AOM и BO_1N и на AB и MN описать дуги, вмещающие угол вращения, т. е. угол между радиусами AO и BO_1.

и для определения точки X достаточно описать на отрезке CP дугу, вмещающую угол, равный $\angle PAB$. Если вместо точки C дано направление искомой секущей XY, тогда из точки P придется провести две прямые, встречающие данную прямую EF под известными углами.

482. Даны две прямые, на них по точке, A и B, и еще точка C. Отыскать на прямых по точке X и Y так, чтобы отношения $AX:BY$ и $CX:CY$ имели данные значения.

483. Даны две прямые, на них по точке A и B. Провести между ними известного направления отрезок XY так, чтобы

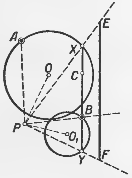
$$AX = XY \cdot k + a$$

и $$BY = XY \cdot m - b \ (a,\ 480,\ \text{II}).$$

484. Даны две прямые, на каждой из них по точке, A и B, и внешняя точка P. Через P провести прямую так, чтобы сумма или разность полученных на данных прямых отрезков AX и BY была определенная.

Реш. На первой прямой отложим данную сумму AD; тогда $DX = YB$ (480, II).

485*. Даны окружности O и O_1 и на них по точке, A и B. Отыскать на окружностях по новой точке X и Y так, чтобы дуги AX и BY заключали одинаковое число градусов, и длина прямой XY была данная (черт. 83).



Черт. 83.

486. Построить прямоугольник с данной диагональю так, чтобы каждая сторона проходила через данную точку.

487. Даны: точка C и прямые AD и BE. Найти на них точки X и Y так, чтобы отрезок XY был виден из C под данным углом, а отношение AX и BY было данное.

Реш. При вращении C перейдет в C_1; $\angle CYC_1$ известен.

488. Даны две пересекающиеся в M и N окружности и на них по точке, A и B. Провести окружность через A и B, встречающую данные окружности в X и Y так, чтобы дуги AX и BY данных окружностей имели одинаковое число градусов.

Реш. P — центр вращения. Прямые AX и BY встречаются на окружности APB и на прямой MN.

489. Даны отрезки AB и CD; найти точку O так, чтобы треугольники AOB и COD были подобны, и при O были равные углы.

490. Даны окружности O_1, O_2 и O_3. Начертить треугольник, равный $\triangle O_1O_2O_3$, так, чтобы вершины его лежали на окружностях.

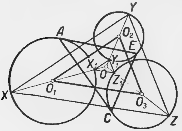
Реш. Определим центр вращения O искомого $\triangle AEC$ и $\triangle O_1O_2O_3$ (черт. 84). Из подобия треугольников AOO_1, EO_2O и COO_3 находим $O_1O:O_2O:O_3O = R_1:R_2:R_3$. Точка O определится г. м. XII. Наибольшее значение $\triangle AEC$ будет $\triangle XYZ$, а наименьшее — $\triangle X_1Y_1Z_1$.

491. Даны две окружности и на них по точке, A и B. Из данного центра C описать окружность, встречающую данные окружности в X и Y так, чтобы дуги AX и BY были подобны.

Реш. При вращении C перейдет в D, и отношение $DX:CX$ будет известно (г. м. XII).

492. Даны три прямые и на них по точке, A, B и C. Провести секущую XYZ (черт. 85) так, чтобы отношения между AX, BY и CZ были данной величины.

Реш. Определим центры вращения O и O_1 так, чтобы CZ и BY совместились с AX. В таком случае известна разность углов O_1XZ и OXY.



Черт. 84.

493*. Две окружности пересекаются в A и B. Найти на них по точке C и D, так, чтобы длина CD и разность углов (или сумма) ABC и ABD были данной величины (485, II).

494. Даны точки D и E на прямых, перпендикулярных AB и AC, и еще внешняя точка F. Через точки A и F провести окружность, встречающую AB и AC в X и Y так, чтобы $DX:EY$ имело данное значение.

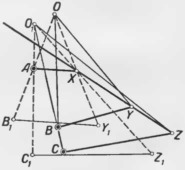
495*. Построить четырехугольник, зная углы и диагонали (493, II).

496. Даны 2 отрезка AB и CD. Отыскать на них (или их продолжении) точки X и Y так, чтобы $AX:CY$ и $BX:DY$ имели данные значения.

497. Построить четырехугольник, зная периметр, углы и угол между диагоналями (493, II, м. п.).

498. Даны прямые AB, AC, AD и точки E и F на прямых AB и AD. На AC и AD найти точки X и Y так, чтобы $\angle EXY$ и $AX:FY$ были данной величины.

499. Стороны c и a треугольника ABC пересечь в точках X и Y окружностью, проходящей через B так, чтобы $AX:BY$ и $BX:CY$ были данной величины (г. м. V).



Черт. 85.

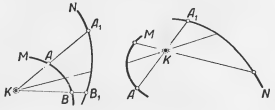
500*. Даны 4 прямые, выходящие из одной точки. Начертить параллелограм с данными сторонами так, чтобы его вершины были на данных прямых (495, II).

Метод инверсии или метод обратных фигур.

Имеем кривую M и неподвижную точку K — начало или центр инверсии. Если возьмем на кривой M точку A и на прямой KA (черт. 86) определим точку A_1 так, чтобы абсолютное значение

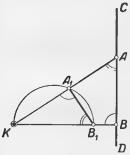
$KA \cdot KA_1 = k^2$, где k есть постоянная длина, то при движении точки A по кривой M точка A_1 опишет новую кривую N, которая называется *обратной* (инвертированной) кривой M. Кривая M иногда называется основной, точки A и A_1 называются соответственными, k^2 — степенью инверсии.

Если начало K — по одну сторону соответственных точек, то степень k^2 употребляют со знаком (+); если же начало лежит между соответственными точками, то степень k^2 употребляют со знаком (—).



Черт. 86.

Если точка A двигается по кривой M, удаляясь от начала, то соответственная ей точка A_1 будет двигаться, приближаясь к началу, и обратно. Затем очевидно, если точка A_1 станет двигаться по кривой N, то, при условии $KA \cdot KA_1 = k^2$, точка A станет описывать кривую M. Следовательно, кривые M и N суть взаимно обратные кривые. Легко доказать следующие теоремы, справедливые для всякой степени, независимо от ее знака.



Черт. 87.

A. Кривая, обратная прямой, проходящей через начало инверсии, есть сама данная прямая.

B. Кривая, обратная прямой, не проходящей через начало инверсии, есть окружность, проходящая через начало инверсии.

Если (черт. 87) A и A_1 суть соответственные точки, $KB \perp CD$ и B_1 — точка, соответственная B, то $KA \cdot KA_1 = KB \cdot KB_1$ и $\triangle KAB \backsim \triangle KA_1B_1$; откуда вытекает, что $\angle KA_1B_1 = 90^\circ$. Прямые AB и A_1B_1 мы будем называть антипараллельными.

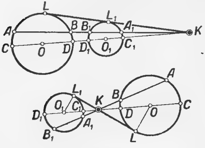
C. Кривая, обратная окружности, проходящей через центр инверсии, есть прямая (обратно с предыд.).

D. Кривая, обратная окружности, не проходящей через центр инверсии, есть окружность, причем начало инверсии совпадает с центром подобия окружностей (внешнего или внутреннего).

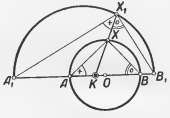
При этом соответственными точками будут те, которые в учении о центре подобия окружностей называются несоответственными. В самом деле, если имеем (черт. 88) две неподвижные окружности, O и O_1, и их центр подобия K, то известно, что $AK \cdot A_1K = BK \cdot B_1K = CK \cdot C_1K = DK \cdot D_1K = KL \cdot KL_1 =$ постоянной k^2. Допустим, что точка, обратная точке A, при степени обращения k^2, не лежит на окружности O_1 — сейчас же выйдет нелепость.

Заметим, что центры O и O_1 не представляют двух соответственных точек.

Если центр инверсии K лежит внутри данной окружности O, то пусть на диаметре AKB (черт. 89) точки A_1 и B_1 будут соответственными A и B, точка же X_1 соответственна точке X, лежащей на окружности O. Тогда подобно теореме B найдем $\angle A_1X_1K = \angle XAK$ и $\angle B_1X_1K = \angle XBK$, откуда $\angle A_1X_1B_1 = 90°$, и кривая, обратная окружности O, есть окружность диаметра A_1B_1, концы которого определяются равенствами $KA \cdot KA_1 = KB \cdot KB_1 = k^2$.



Черт. 88.



Черт. 89.

Если центр инверсии выбран так, что данная окружность проходит через две взаимно обратные точки, то *кривая, обратная этой окружности, есть она сама,* при этом начало инверсии может быть и вне, и внутри данной окружности.

Для черчения обратных кривых употребляется особый прибор *инвертор* (inverseur).

Инвертор Peaucellier состоит (черт. 11) из четырех, скрепленных шарнирами равных линеек, образующих ромб A_1XAY; к ним на шарнирах прикреплены равные линейки KX и KY. В K — острие, в A и A_1 — карандаши. Если точку K закрепить, точку же A_1 двигать по кривой B_1A_1 (например, по окружности KA_1B_1), то A будет двигаться по обратной кривой, в данном случае по $AB \perp AK$, и обратно (106, I).

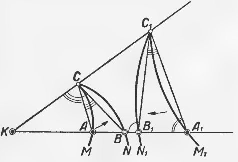
В данном случае степень инверсии равна $KX^2 - AX^2$. Для того, чтобы ее менять, линейки KX и KY делаются раздвижными. Легко подобрать длину KX так, чтобы $KX^2 = AX^2 + k^2$.

Инвертор математика Hart состоит из четырех линеек $DE = FG$ и $EG = DF$, скрепленных шарнирами D, E, F, G и образующих равнобедренную трапецию (черт. 11). Карандаши находятся в A_1 и A — точках пересечения диагоналей с воображаемой медианой KM; в точке K — острие (107, I).

E. Если две кривые пересекаются или касаются, то обратные им кривые пересекаются или касаются в соответственной точке, потому что общая точка первых кривых перейдет на обе обратные кривые. Наоборот, *непересекающиеся кривые после инверсии дают*

вообще тоже непересекающиеся кривые, за исключением некоторых случаев. Напр., две параллели после инверсии превращаются в две касательные окружности — точка касания в начале инверсии.

G. *Угол пересечения двух кривых равен углу пересечения обратных кривых, но противоположен ему по знаку*. Пусть M и N будут данные кривые (черг. 90), M_1 и N_1 — им обратные, A и A_1, B и B_1 — две пары соответственных точек, дающих один луч $KABB_1A_1$. Точка пересечения кривых C при инверсии переходит в C_1. Отметим любопытное явление. В промежутке C_1KM_1 соответственные точки кривых M и M_1 по мере удаления их от C и C_1 *удаляются* друг от друга; соответственные точки кривых N и N_1 в том же промежутке *приближаются* друг к другу. Это естественно вытекает из равенств $AK \cdot A_1K = BK \cdot B_1K = k^2$. Как показано в теор. B, отрезки CA, C_1A_1, точно так же, как CB и C_1B_1, антипараллельны, и потому $\angle KCB = \angle KB_1C_1$, $\angle KCA = \angle KA_1C_1$; след., $\angle ACB = \angle KB_1C_1 - \angle KA_1C_1 = \angle B_1C_1A_1$. С приближением A и B к C, точки A_1 и C_1 стремятся беспредельно к C_1, равенство же углов ACB и $A_1C_1B_1$, в силу принципа непрерывности, будет сохраняться и перейдет в равенство углов между касательными к кривым, проведенным в точках C и C_1. Далее мы видим, что хорда CA может перейти в CB вращением около C по направлению, обратному часовой стрелке; тогда хорда C_1A_1 переходит в C_1B_1 вращением около C_1 по обратному направлению; след., $\angle\angle ACB$ и $A_1C_1B_1$, как и углы между касательными, должны иметь противоположные знаки. Итак, инверсия двух кривых не меняет величины угла, под которым эти кривые пересекаются: она только меняет знак этого угла. Этот факт в некоторых задачах приобретает громадное значение.



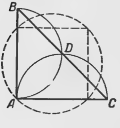
Черт. 90.

H. *Четное число инверсий двух кривых совершенно не меняет угла их пересечения; нечетное число инверсий двух кривых меняет только знак этого угла*. Это — следствие из теор. G. Конечно, каждая инверсия при этом должна быть сделана для обеих кривых с одинаковым началом и степенью.

Пусть имеем фигуру, состоящую из прямых и окружностей. Если эту фигуру инвертировать, то прямые и окружности превратятся в известные прямые и окружности, или в одни окружности, которые будут пересекаться под теми же углами, как и в данной фигуре. Если какая-нибудь точка данной фигуры представляла, напр., вершину какого-нибудь угла, то в обратной фигуре она представит вообще точку пересечения окружностей, пересекающихся под тем же

углом. Словом, обратная фигура (ее называют отображением данной фигуры) удерживает до мельчайших деталей своеобразное сходство с данной фигурой [1]).

Зная отображенную фигуру и положение начала инверсии, нередко можно легко отгадать форму основной фигуры; что касается ее размера, то для этого нужно знать степень инверсии. Так, напр., пусть дана отображенная фигура в виде (черт. 91) равнобедренного прямоугольного $\triangle ABC$ с полуокружностями ADC и ADB, диаметры которых равны катетам AC и AB, причем центр инверсии был в A. Спрашивается, какова была основная фигура?



Черт. 91.

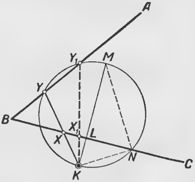
Прямая BC была окружностью, проходящей через A; диаметр ее равнялся какому-нибудь отрезку AE, лежащему на AD, равные полуокружности ADB и ADC, пересекающиеся под прямым углом, очевидно, получились из равных отрезков, пересекавшихся под прямым углом и т. д. Найдем, что основной фигурой была окружность с вписанным в нее квадратом [2]).

Задачи на метод инверсии можно разделить на три группы.

Первая группа. В задачах этого рода обратные кривые играют роль геометрических мест. Начало и степень инверсии в этом случае известны. Например.

501. *Даны: точка K и две прямые AB и BC (вообще две кривые). Провести секущую KXY так, чтобы $KX \cdot KY = k^2$ (k есть данная длина, черт. 92).*

Реш. Искомая точка Y есть пересечение BA с кривой, обратной BC, при начале K и степени инверсии k^2. Поэтому (теор. B) опускаем $KL \perp BC$, на BC отложим $LN = k$ и проводим $MN \perp KN$ до пересечения с KL в точке M. Окружность, описанная на диаметре MK, встретит AB в искомой точке.



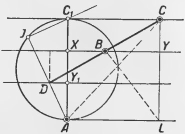
Черт. 92.

---

[1]) Необходимо, однако, помнить, что это характерное сходство во многих случаях мы не можем выражать числами. Так, если в данном $\triangle ABC$ известны углы, периметр и площадь, то он отобразится в виде трех пересекающихся дуг. Хорды этих дуг мы можем вычислить; но какой длине равна сумма этих дуг и какова будет площадь, ими ограниченная, средствами элементарной математики вообще нельзя достигнуть. В вопросах этого рода нужна большая осторожность.

[2]) Вот еще пример. Некоторая фигура отобразилась в виде $\triangle BCD$ с четырьмя окружностями, касающимися его сторон; начало инверсии было в точке A, лежащей вне $\triangle BCD$. Спрашивается, какова была основная фигура?

Вторая группа. В задачах этой группы инвергируется некоторая часть искомой фигуры (отрезок, точка или окружность); при этом теория инверсии, иногда в соединении с другими методами, часто укажет такую зависимость начала инверсии от данных и искомых, которая позволяет решить задачу. Начало и степень инверсии или даны, или должны быть целесообразно выбраны. Задачи этого рода напоминают третью группу задач на вращение — эти задачи разрешаются, если найти зависимость данных и искомых от центра вращения. В выборе начала, степени и, наконец, числа инверсий иногда встречаются затруднения. Примеры.



Черт. 93.

502. *Даны точки A, B и C. Через B провести прямую так, чтобы расстояния AX и CY от этой прямой удовлетворяли равенству* $AX^2 - CY^2 = k^2$ (черт. 93).

Реш. Из равенства $(AX + CY)(AX - CY) = k^2$ вытекает необходимость ввести в чертеж сумму и разность AX и CY. Поэтому переносим параллельно CY в C_1X, а BC повертываем на 180° около B в положение BD и проводим $DY_1 \parallel BX$. Тогда $XY_1 = C_1X$ и $AC_1 \cdot AY_1 = k^2$. Если взять за начало инверсии A и за степень ее k^2, то C_1 есть точка окружности, обратной прямой DY_1; диаметр этой окружности равен AC_1. Так как точки D и J соответственные, то $AD \cdot AJ = k^2$, что дает возможность построить точку J. Тогда для определения точки C_1 имеем $JC_1 \perp AD$ и окружность, диаметр которой равен AC [1]).

Лучшим типом задач этого рода служит знаменитая задача 503, II. Существуют предубеждения относительно трудности этой задачи, но эта трудность не так велика, как обыкновенно думают.

503. I. *В данную окружность вписать четырехугольник ABCD, стороны которого проходили бы соответственно через данные точки a, b, c и d* (черт. 94).

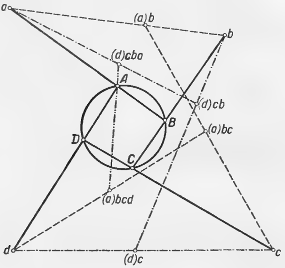
Примем a, b, c и d за начала последовательных инверсий, и за степени инверсий возьмем квадраты касательных из этих точек к данной окружности. Вообразим прямую XAY и посмотрим, как надо выбирать точки X и Y, чтобы выяснилась их зависимость от точки A.

После четырех инверсий около a, b, c и d точка A и данная окружность придут сами в себя, прямая же AX отобразится в окружности (теор. B). Если мы желаем, чтобы прямая AX отобразилась

[1]) Это решение принадлежит Д. Аитову (Париж) и отличается замечательной стройностью логики. Но есть другие решения; самое короткое указал М. А. Орбек. Продолжим (черт. 93) CY до пересечения с $AL \parallel XY$. Тогда $BL^2 = BY^2 + YL^2 = BC^2 - CY^2 + AX^2 = k_1^2 + k^2$, и для точки L имеем два геометр. места.

после четырех инверсий тоже в прямую, то точку X нельзя выбирать произвольно, а надо сделать так, чтобы точка X после инверсий около a, b и c попала в точку d (теор. C).

Искомым положением точки X будет такая точка M, которая получится, если d инвертировать около c, b и a [1]).



Черт. 94.

Подобным образом, если прямую AY инвертировать около d, b, c и a, то она отобразится в виде прямой, если за точку Y возьмем такую точку N, которая получится инверсией точки a около b, c и d. Но так как четыре инверсии не меняют углов MA и NA с окружностью (теор. H), то MA и NA останутся на одной прямой.

Итак, найдем M инверсией d около c, b и a; затем определим N инверсией a около b, c и d. Прямая MN определит точку A.

Это решение легко распространить на всякое четное число данных точек.

II. *В данную окружность вписать треугольник, стороны которого проходили бы соответственно через данные три точки.*

Решение такое же, только точка M определяется пятью инверсиями c около начал b, a, c, b и a. Затем сказанное легко распространить на всякое нечетное число сторон вписанной фигуры (решение М. А. Орбек).

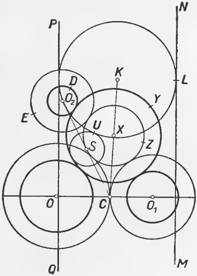
---

[1]) На рисунке точка, полученная последовательной инверсией точки d около начал c, b и a, обозначена символом $(d)\,cba$; точка, полученная инверсией точки a при начале b, обозначена символом $(a)\,b$ и т. д. Последовательные инверсии легко проследить по разнице в пунктире. В сложных случаях принятый символ оказывался очень полезным.

Третья группа. Мы видели, что фигура, обратная данной, сохраняет до мельчайших подробностей своеобразное сходство с данной фигурой. Всякая задача на построение дает некоторую фигуру, причем некоторые элементы этой фигуры неизвестны. Инвертируем всю эту фигуру. Тогда данные искомые отобразятся известным образом, и часто может случиться, что зависимость данных и искомых в отображенной фигуре гораздо проще, чем в основной фигуре. Тогда надо построить отображенную фигуру. Раз построена отображенная фигура, то ее надо инвертировать обратно с теми же началом и степенью инверсии. В этом и состоит главная идея метода инверсии. Разумный выбор начала инверсии играет существенную роль: есть случаи, которые разрешаются только предварительными изысканиями удобного положения начала инверсии (160, IV). Степень инверсии в этом случае обыкновенно бывает произвольной.

504. *Через данную точку провести окружность, пересекающую данные две окружности под определенными углами.*

Реш. Данную точку возьмем за начало инверсии, степень выберем произвольно. Тогда данные окружности превратятся в новые окружности, а искомая окружность превратится в прямую, которая пересекает (теор. G) две новые окружности под известными углами. Но угол прямой и окружности определяет длину хорды их пересечения. Поэтому задача приводится к 166, II; затем останется полученную прямую инвертировать обратно.



Черт. 95.

505*. *Задача Аполлония. Провести окружность, касательную к трем данным окружностям.*

Реш. Пусть искомая окружность будет (X, Y), и данные окружности расположены, как показывает черт. 95. Руководясь идеей (ε), сделаем так, чтобы две из них, O и O_1, сделались касательными в C. Тогда третья окружность (O_2, D) перейдет в (O_2, E), а искомая окружность перейдет в (X, Z).

Инвертируем теперь всю фигуру, взяв за начало C при произвольной степени инверсии. Окружности (O, C) и (O_1, C) обратятся в параллельные прямые PQ и MN, а окружность (O_2, E) отобразится в окружности (S, U); искомая же окружность перейдет в окружность (K, L), которая будет касаться прямых QP и NM, а также окружности (S, U). Таким образом, задача привелась к очень легкой задаче 34, II (ε).

506. Даны две окружности и точка K. Провести секущую KAB так, чтобы $KA \cdot KB = k^2$.

507. В данный параллелограм вписать параллелограм данной площади и с данным углом диагоналей (м. в).

Реш. Обе фигуры имеют общий центр; произведение расстояний центра до двух вершин искомой фигуры известно.

Построить треугольник, зная:

508. $C - A$, h_c и произведение AC на отрезок CE, отсекающий от угла B равнобедренный треугольник.

Реш. Повернем AB около C на данный угол до пересечения с кривой, обратной AB.

509. A, a и $BD \cdot AB$, где $BD = h_b$.

510. $A - C$, ac и h_b.

511. Даны точки A, B и C. Через C провести прямую так, чтобы произведение ее расстояний до A и B было данное.

Реш. Расстояние BE перенесем параллельно в AM на AD; C перейдет в известную точку. Так как M — на известной окружности, то для определения D имеем прямую и окружность.

512. Через две данные точки провести окружность, пересекающую данную окружность под данным углом (60, II).

513*. Через данную точку провести окружность, касательную к двум данным окружностям (ε, 34, II).

514*. Три данные окружности пересекаются в одной точке. Провести окружность, пересекающую их под данными углами (117, II).

515. Даны две пересекающиеся окружности и еще окружность. Начертить окружность, пересекающую первые две под данными углами и касательную к третьей окружности (287, II или ε, 505, II).

516. Даны две окружности и точка. Провести через эту точку окружность, встречающую данные окружности под данными углами.

517. Даны прямые, AB и AC, и окружность O. Провести окружность X, встречающую их под данными углами.

Реш. Прямая AX известна (116, II). Пусть окружности O и X встречаются в D. Тогда $\triangle DXO$ умножим на $AX:DX$ и повернем около X на $\angle AXD$. Точки D и O придут в A и E (м. п.).

518. Даны две пересекающиеся окружности и прямая. Провести окружность, встречающую их под данными углами (517, II).

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ПРИЛОЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ.

Обозначая длину данных отрезков буквами a, b, c и d..., неизвестный же отрезок буквой x, а буквами m и n отвлеченные числа, построить следующие отрезки:

1. $x = a \pm b$, $x = a + b - c + d$, $x = 2a \pm 3c$.

2. $x = \frac{ac}{b}$, $x = \frac{(a+d)c}{a}$, $x = \frac{a(c-d)}{b}$. Построение основано на свойствах хорд, секущих или двух параллелей, пересекающих произвольный угол.

Для построения иррациональных выражений полезно помнить следующее правило:

1) если корень извлекается из одночлена, то надо удалить корень с помощью возвышения в степень и пользоваться теоремами о средних пропорциональных;

2) если корень извлекается из многочлена, то должно каждый член многочлена превратить в полный квадрат и применить несколько раз теорему Пифагора.

3. $x = \sqrt{ab}$, $x = \frac{a^2}{d}$, $x = \frac{(a+c)^2}{a}$, $x = \sqrt{\frac{a^2d}{b}}$, $x = a\sqrt{\frac{d}{c}}$.

4*. $x = a\sqrt{2}$, $x = a\sqrt{3}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{a}{\sqrt{m}}$.

5. $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, $x = \sqrt{ad - c^2}$, $x = \sqrt{ma^2 - nb^2}$.

6. $x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $x = \frac{ad^2}{c\sqrt{4a^2 - 9d^2}}$, $x = \sqrt[4]{abcd}$, $x = \sqrt[4]{a^2dc}$.

Примечание. В третьем примере построим сначала $y = \sqrt{ab}$, $z = \sqrt{cd}$.

7. Построить корни уравнения $x^2 \pm ax + b^2 = 0$, полагая $a \geqslant 2b$.

Опишем полуокружность на $AB = a$ и проведем $CD \parallel AB$ на расстоянии b от AB. Из точки пересечения CD с окружностью опустим $EF \perp AB$. Тогда искомые корни по их абсолютной величине будут AF и FB, потому что $AF + FB = a$ и $AF \cdot FB = b^2$.

8. Построить корни уравнения $x^2 \pm ax - b^2 = 0$.

Соображаясь со свойствами касательной и секущей, в произвольной окружности O берем хорду $AB = a$; в произвольной точке E

проводим касательную $ED = b$ и чертим окружность (O, D) до пересечения с AB в C. Искомые корни по абсолютной величине будут AC и BC, потому что $AC - BC = a$ и $AC \cdot BC = b^2$. Можно найти корни, решив данное уравнение (14, III), но вообще не следует спешить решением уравнения (17, III). Заметим, что, как бы ни было сложно данное уравнение, его всегда можно привести к предыдущему виду с помощью задач 1 — 6, III. Вообще такое приведение выгоднее сделать до решения уравнения.

9. Построить корни уравнений $x^4 - 4c^2x^2 - c^4 = 0$ и $x^4 - 2adx^2 + 2a^2d^2 = 0$.

10. Показать, что во всех предыдущих задачах можно под буквами разуметь дуги различных радиусов и одинакового числа градусов.

С помощью алгебры геометрические задачи на построение решаются следующим образом. Предположив, что задача решена, надо заметить те неизвестные[1]), к определению которых сводится задача. Затем для определения этих неизвестных, на основании различных теорем, составляем уравнения. Определив из составленных уравнений выбранные неизвестные, должно их построить. После того, как неизвестные построены, надо сделать еще те построения, которые окончили бы решение. Затем придется доказать, что условия задачи удовлетворяются. В конце всего надо исследовать вопрос и определить условия его возможности.

При этом следует помнить: 1) когда говорится в условии задачи „дан треугольник“, „дана окружность“ и так далее, то это значит, что эти фигуры где-нибудь начерчены и что нам, следовательно, известно все, что мы сумеем построить на этих фигурах циркулем и линейкой; 2) число составленных уравнений должно равняться числу неизвестных; в противном случае задача будет неопределенной; уравнения должны быть независимы друг от друга и исчерпывать все условия и свойства вопроса; 3) при построении корней квадратного или биквадратного уравнения известный член этих уравнений вообще выгоднее представить в виде полного квадрата прежде, чем решать уравнение; 4) построение неизвестной вообще должно быть сделано на чертеже, данном в условии задачи.

Прежде чем составлять уравнения, весьма полезно сообразить, сколько неизвестных, и группировать данные условия так, чтобы из каждой группы вытекало одно уравнение. Прежде чем решать уравнение, надо посмотреть, стоит ли его решать: быть может, корни полученного уравнения — мнимые, тогда задача невозможна и уравнение не стоит решать. Некоторые задачи можно решить, определив и построив одно какое-нибудь из нескольких неизвестных; выбрать это одно неизвестное из нескольких есть дело навыка и удачи и не всегда дело соображения.

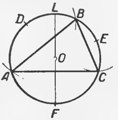
Поясним сказанное на примерах.

---

[1]) Всего чаще отрезки и в редких случаях углы или дуги, 11, 18, III.

11. *Вписать в данную окружность треугольник, зная середины дуг, стягиваемых сторонами* (черт. 96).

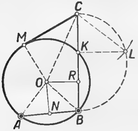
Пусть $\triangle ABC$ вписан в окружность O так, что данные точки D, E и F суть середины дуг AB, BC и AC. Вопрос приводится к определению длины одной из дуг AD, BE и FC. Обозначим известные нам дуги $DE=a$, $EF=b$, $FD=c$ и неизвестные дуги $AD=x$, $BE=y$ и $FC=z$. Тогда находим три уравнения $x+y=a$, $y+z=b$, $x+z=c$. Складывая все уравнения, получим $2(x+y+z)=a+b+c$; заменив последовательно суммы $x+y$, $y+z$, $x+z$ их значениями и заметив, что $a+b+c=360^\circ$, найдем $z=180^\circ-a$, $x=180^\circ-b$, $y=180^\circ-c$. Для построения z надо поступать следующим образом.



Черт. 96.

Проведем диаметр FL и от точки L отложим влево дугу DE (для этого из L опишем дугу радиусом DE) до точки A. Тогда $AF=180^\circ-a=z$. Далее надо отложить дугу $DB=AD$ и дугу $EC=EB$[1]); получим $\triangle ABC$.

Достаточно доказать, что $AF=FC$, так как точки D и E суть средины дуг AB и BC по построению. Так как $AF=180^\circ-a$, след., $AD=c-(180^\circ-a)=c+a-180^\circ$; $BE=DE-DB=DE-AD=a-(c+a-180^\circ)=180^\circ-c$; $FC=EF-EC=EF-EB=b-(180^\circ-c)=b+c-180^\circ$. Но так как $a+b+c=360^\circ$ или $b+c-180^\circ=180^\circ-a$, то $FC=AF$. Задача остается возможной, если две из сумм $a+b$, $b+c$, $a+c$ остаются более 180°. В самом деле, если $a+b\leqslant 180$ и $a+c\leqslant 180^\circ$, то $2a+b+c\leqslant 360^\circ$, и потому $a+b+c<360^\circ$. Каждые две из дуг x, y, z не могут быть отрицательными. Пусть $180^\circ-a<0$ и $180^\circ-b<0$; тогда $a>180^\circ$ и $b>180^\circ$, между тем как сумма $a+b+c$ должна равняться 360°.



Черт. 97.

Совершенно подобным образом решается следующая задача: „приняв вершины данного треугольника за центры, описать три окружности, касающиеся друг друга (2, IV)“.

12. *Провести окружность через две точки A и B так, чтобы касательная к ней из точки C равнялась данной длине a.*

Пусть через точки A и B (черт. 97) проведена окружность так, что касательная к ней из точки C равняется a. Так как через три точки можно провести окружность, то проведем CB и определим положение точки K. Полагаем $CK=x$ и $CB=c$; тогда по свойству

---

[1]) Теперь видно, как решать эту задачу построением. Если догадаться провести диаметр FL, то стоит только перенести сегмент DLE в положение ADL; получится точка A.

касательной $cx=a^2$. Для построения x чертим полуокружность на BC и дугу (C, a); затем опустим $LK \perp BC$.

Тогда $c \cdot KC=a^2$; поэтому $x=KC$, и точка K будет искомая. Восставив перпендикуляры из середин AB и KB до их пересечения, найдем искомый центр O. Начертив искомую окружность, проводим касательную MC; тогда $MC^2=CB \cdot KC=c \cdot \frac{a^2}{c}=a^2$ и $MC=a$, как и требовалось. Выражение $a \leqslant c$ будет условием возможности задачи, так как только под этим условием дуга (C, a) пересечет окружность CLB. Чисто геометрическое решение этой задачи совпадает с указанным решением.

Теперь сведем решение задачи на определение радиуса OB, ограничиваясь для простоты тем случаем, когда $\angle CBA$ — прямой. Пусть $AB=d$; тогда $OB=\sqrt{OR^2+RB^2}$, но $OR=NB=\frac{d}{2}$,

а $RB=\frac{BC-KC}{2}=\frac{c-\frac{a^2}{c}}{2}=\frac{c^2-a^2}{2c}$; поэтому

$$OB= \pm \sqrt{\frac{d^2}{4}+\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}.$$

Это выражение сложнее предыдущего, и потому первым способом задача решается легче. Притом, если будем решать задачу вторым способом, то все-таки придется определить длину CK.

Из этого примера видно, что всегда надо следить, не вводим ли мы при определении неизвестной такую другую неизвестную, на определение которой также может быть сведена решаемая задача; удобнее тогда переменить план решения задачи и выбор неизвестной.

Иногда для неизвестного получается отрицательное выражение. Отрицательные решения должно отбросить в трех случаях:

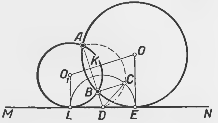
1) Когда искомый отрезок может быть построен в совершенно произвольном положении на плоскости; в этом случае направление искомого отрезка не играет никакой роли. Примеры: 21, 28, 24, 43 и т. д.[1]).

2) Когда искомый отрезок, будучи связан по положению с данными, может иметь два противоположных направления, но, в силу ограничения, поставленного в условии задачи, должен иметь одно определенное направление. Примером служит задача 14, III. Если подобные задачи предложить в более общем виде, отбросив частные условия, то отрицательные решения будут иметь место (14, III).

[1]) Как только условия задачи касаются положения искомого отрезка на плоскости, отрицательное решение может иметь место, хотя бы искомую фигуру было возможно определить отдельным построением в произвольном положении. Так задача «провести через две данные точки окружность данного радиуса» допускает отрицательное решение (за неизвестную можно принять расстояние центра от середины данной прямой), хотя искомая окружность может быть построена отдельно в произвольном положении.

3) Когда абсолютное значение неизвестного имеет определенные границы, а абсолютное значение отрицательного решения выходит из этих границ. В этих случаях положительные решения бывают также негодны. Замечательно, что отрицательные решения, негодные по первому правилу, очень часто выходят негодными и по третьему правилу. Так в № 24, III гипотенуза искомого треугольника, по первому правилу, не должна быть отрицательной; посмотрев на абсолютную величину отрицательного выражения для этой гипотенузы, мы видим, что она больше суммы катетов ($h + \sqrt{h^2 + s^2} > s$). Такое согласие можно наблюдать во всех задачах, условия которых приводят к полному квадратному уравнению.

Если условия вопроса допускают двойной ответ и искомый отрезок может иметь два противоположных направления, то отрицательное решение, за исключением 2-го и 3-го случая, будет годным. Тогда для построения отрицательных решений надо помнить следующее правило: неизвестный отрезок, для которого получилось положительное выражение, должен быть построен от какой-нибудь известной точки в том направлении, в каком он был на чертеже, послужившем для составления уравнения; неизвестный отрезок, для которого получилось отрицательное выражение, должен быть отложен в противоположном направлении от той же известной точки. Так в следующих двух задачах для составления уравнения взяты чертежи, на которых неизвестные DE и BM (черт. 98 и 99) лежат вправо от известных точек D и B. Поэтому отрицательные выражения для неизвестных отрезков должны быть построены по своему абсолютному значению влево от точек D и B. Примеры.



Черт. 98.

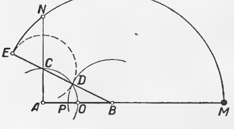
13. *Через две данные точки A и B провести окружность, касательную к данной прямой MN.*

Пусть окружность O (черт. 98) проходит через точки A и B и касается прямой MN в точке E. Так как центр должен лежать на перпендикуляре, восставленном к MN в точке E, то задача приводится к определению точки E или к определению отрезка DE. Полагаем $DE = x$, $AD = a$ и $BD = b$; тогда по свойству касательной имеем уравнение $x^2 = ab$, откуда $x = \pm\sqrt{ab}$. Построим абсолютную величину x. Для этого, описав полуокружность на AD, восставим $BC \perp AB$; тогда $CD^2 = AD \cdot BD = ab$, $CD = \pm\sqrt{ab}$ и $x = CD$. Корень $+\sqrt{ab}$ надо отложить так, как лежал неизвестный отрезок на чертеже, служившем для составления уравнения, т. е. вправо от точки D; второй же корень — отрицателен, и

потому его абсолютную величину надо отложить в противоположном направлении, т. е. влево от точки D. Чтобы сделать и то и другое сразу, опишем дугу (D, DC); тогда получим две искомые точки E и L, а затем и два искомых центра O и O_1. Докажем это для окружности O_1. Так как $LD^2 = AD \cdot BD$ по построению, то (88, I) точки L, A и B лежат на окружности, касательной к MN. Исследование очень просто. Чистым построением задача решается немного сложнее.

14. *На горизонтальном отрезке AB вправо от точки B найти точку M, удовлетворяющую равенству $BM^2 = AM \cdot AB$.*

Пусть на продолжении AB отыскана точка M так, что $BM^2 = AM \cdot AB$ (черт. 99). Полагая $BM = x$ и $AB = a$, получаем $x^2 = a(x + a)$, откуда $x^2 - ax - a^2 = 0$. Корни этого уравнения действительны; отрицательный корень по второму правилу должен быть отброшен. Положительный корень будет $x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Делим AB в точке O пополам и на перпендикуляре AN откладываем $AC = \frac{a}{2}$. Тогда $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$; затем надо к BC прибавить $AO = \frac{a}{2}$; получим $x_1 = EB$; откладывая $BM = EB$, определим искомую точку M.



Черт. 99.

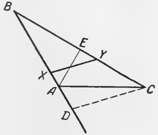
Если из условия вопроса выпустить слова „вправо от точки B“, то отрицательный корень станет годным. Абсолютное значение этого корня будет $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$. Чтобы построить это выражение, надо из BC вычесть AO. Чтобы сразу построить x_1 и абсолютную величину x_2, надо описать дугу (C, A); $EB = x_1$, $DB = x_2$. Так как x_1 положителен, то его надо отложить так, как лежал x на чертеже, взятом для составления уравнения; получим одну искомую точку M. Так как корень x_2 отрицателен, то длину BD надо отложить на прямой AB в противоположную сторону от точки B; получим другую искомую точку P.

Докажем, что точка M удовлетворяет условию вопроса. Подставляя в $BM^2 = AB \cdot AM$ величины $BM = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ и $AM = a + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}\right) = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, получим $\frac{1}{4}a^2(1 + \sqrt{5})^2 = \frac{1}{2}a^2(3 + \sqrt{5})$, что по сокращении дает тождество. Решение задачи чистым построением указано в 8, III.

Приводим два примера, указывающие, как сильно упрощают дело предварительные построения, основанные на чисто геометрических идеях.

15. *Между сторонами AB и BC треугольника ABC в известном направлении провести отрезок XY так, чтобы $BX \cdot CY = k^2$.*

Проведем $CD \parallel XY$ (μ, черт. 100). Полагая $BX = x$, $CY = y$, $BC = a$ и $DB = d$, находим $xy = k^2$ и $x : d = (a - y) : a$, откуда $x = \frac{(a-y)\,d}{a}$. Тогда первое уравнение дает $\frac{(a-y)\,dy}{a} = k^2$ или $y^2 - ay + \frac{ak^2}{d} = 0$ и задача приведена к 7, III.



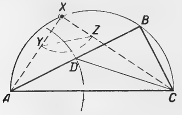
Черт. 100.

Решим эту задачу чистым построением. Так как BY не равно BX (λ), то для их совмещения умножим BX на $(a : d)$ и повернем BX около B на угол B. Тогда BX сольется с BY и будем иметь: $BY + YC = a$ и $BY \cdot YC = ak^2 : d$. Задача приведена опять к 7, III. Условие возможности есть $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqslant \frac{ak^2}{d}$.

16. *Разделить пополам периметр и площадь данного $\triangle ABC$ отрезком XY, лежащим внутри угла B.* Проведем (α) медиану AE (черт. 100). Тогда треугольники XBY и ABE равновелики и, полагая $2p = 4k$, находим (1) $BX + BY = 2k$, $BX \cdot BY = AB \cdot BE = l^2$ и задача приведена к 7, III.

Решение этой задачи чистым построением совпадает с указанным решением.

Пусть BX будет меньшим корнем уравнения (1) и $a \geqslant c$. Тогда неравенства $k^2 \geqslant l^2$, $BX \leqslant c$, $BY \leqslant a$ обеспечивают одно решение. Так как BX можно отложить на a, а BY — на c, то для возможности двух решений нужно $k^2 \geqslant l^2$ и $BY \leqslant c$.



Черт. 101.

Неравенства $BX \leqslant c$ и $BY \leqslant a$ дают $a \geqslant b \geqslant c$. Неравенство $BY \leqslant c$ дает $c \geqslant b$. Отсюда видно, что два решения могут быть лишь при условии $a \geqslant b = c$. Один из этих случаев — на чертеже.

Наконец, считаем не лишним привести пример, показывающий, что иногда полезно, прежде чем решать уравнение, вглядеться в его сущность и постараться построить его корни независимо от решения уравнения. Опыт показывает, что таких случаев очень много; построения при этом часто оказываются и изящнее, и экономичнее.

17. *Построить корни уравнений $x^2 + y^2 = k^2$ и $(x - a) : y = m : n$, где a, m, n и k суть данные отрезки.*

Очевидно, x и y суть катеты, k — гипотенуза. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, $AB = x$, $BC = y$ (черт. 101). Если описать окружность (A, a), то $BD : BC = m : n$ и форма $\triangle DBC$ известна. Если же $\angle BDC$ известен, то легко найти и $\angle ADC$. На $AC = k$ описываем полуокружность и берем произвольную на ней точку X. Откладываем на XA и XC отрезки $XY = m$ и $XZ = n$. Затем на AC описываем дугу, вмещающую $\angle AYZ$, до пересечения в D с окружностью (A, a). Если сосчитать все элементарные построения, то оказывается, что число построений в указанном решении меньше, чем в построении корней, полученных после решения уравнения.

18. Построить два отрезка или две дуги, зная их сумму a и разность b.

19. Построить два угла, зная их сумму s и разность d.

20. Построить три отрезка или три угла, зная их сумму s и разности a и b между каждыми двумя.

21. Построить два отрезка, зная их произведение k^2 и отношение $2:3$.

22. Насколько надо изменить данные отрезки a и b, чтобы они пришли в данное отношение?

23. Даны два отрезка. На сколько надо изменить каждый из них, чтобы произведение их было равно k^2?

24. Построить прямоугольный треугольник по данной сумме (или разности) его катетов s и высоте h, опущенной из прямого угла (за неизвестную удобнее принять гипотенузу).

25. Данный отрезок разделить на две части так, чтобы одна из них была средней пропорциональной между другой частью и другим данным отрезком.

26. Даны угол и точка. Провести через эту точку секущую так, чтобы разность отрезков, образованных на сторонах угла, была данная.

Реш. Из данной точки проведем параллели сторонам угла.

27. Через вершину A данного квадрата $ABCD$ провести прямую так, чтобы ее отрезок между CD и продолжением BC был данной длины.

28. Построить расстояние центров описанной и вписанной в треугольник окружности, зная R и r.

29. Через точки A и B провести окружность, отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

30. На бильярде, имеющем форму круга O, лежит шар в точке A. Требуется его ударить так, чтобы он прошел через прежнее свое место, отразившись от стенок два, три, четыре ... раза.

Реш. Пусть ABC путь шара в первом случае. Для расстояния O от BC получим кубичное уравнение, которое можно сократить [1]).

---

[1]) При сокращении уравнения пропадает корень, неудовлетворяющий условиям вопроса. В других случаях, сокращая уравнение на количество, содержащее в себе неизвестное, мы можем удалить такой корень, который удовлетворяет условиям вопроса. Корень, удаляемый при сокращении уравнения, можно найти, приравнивая нулю то количество, на которое уравнение сокращено.

Остальные случаи приводятся к построению сторон правильных многоугольников (60, II).

31. В данную окружность вписать многоугольник, зная середины дуг, стягивающих его стороны (11, III).

32. На диаметре AB данной окружности имеем точку C. Параллельно AB провести хорду XY так, чтобы $\angle XCY$ был прямой.

33*. Из точки A провести к окружности O секущую так, чтобы она разделилась окружностью на части, разность которых равна данной длине.

34. Даны две окружности; поместить их на таком расстоянии, чтобы общая к ним внешняя касательная была вдвое более внутренней общей касательной.

35*. В окружность вписать пять равных квадратов; у первого центр общий с окружностью, а две вершины каждого из остальных квадратов лежат на окружности. (Два случая.)

36. Прямая CB касается данной окружности O в точке B; на этой прямой найти точку, соединив которую с концом A диаметра AB, получим секущую, внешний отрезок которой равен данной длине.

37. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник, зная медиану, выходящую из конца основания (дополним искомый треугольник до параллелограма).

38. Начертить r, зная S и $2p$.

39. Начертить R, зная h_a и bc (90, I).

40*. В данный равнобедренный $\triangle ABC$ вписать $\triangle DEF$ так, чтобы $DE \parallel AC$ и площадь $\triangle DEF$ составила пятую долю площади $\triangle ABC$.

Построить треугольник, зная:

41. R, h_a и $b+c$ (90, I). **42.** R, $S=k^2$, $ac=m^2$ (90, I).

43. R, h_a и $b:c$. **44.** b и h_b, если известно, что $a=h_a$.

45. Внутри $\triangle ABC$ дана точка M; провести через нее прямую, которая делит площадь треугольника ABC пополам.

Реш. Из M опустим перпендикуляры на стороны угла.

46. Через данную точку P провести окружность, касательную к сторонам данного угла.

Реш. Отразим P в биссекторе данного угла (13, III).

47. Из высот данного равностороннего $\triangle BAC$ составлен $\triangle A_1B_1C_1$; из высот $\triangle A_1B_1C_1$ составлен новый $\triangle A_2B_2C_2$; из высот $\triangle A_2B_2C_2$ составлен новый треугольник, и так далее до бесконечности. Начертить равносторонний треугольник, равновеликий сумме всех полученных треугольников, считая в том числе $\triangle ABC$.

48. Дан квадрат $OABC$ и окружность (O, A). Провести к дуге AC касательную XY, отсекающую от квадрата $\triangle XBY$ данной площади.

49. Описать две окружности, касающиеся данной окружности и между собой, так, чтобы разность площадей искомых кругов равнялась четверти площади данного круга и центры всех трех окружностей лежали на одной прямой. (Два случая.)

50. Если каждый из катетов треугольника изменить на данную длину, то они придут в данное отношение. Построить этот треугольник, зная его гипотенузу (17, III).

51*. Даны две внешне касающиеся окружности и касательная к ним окружность, так что все три центра лежат на одной прямой. Провести окружность, касательную ко всем трем окружностям.

52. В данную окружность вписан квадрат, в квадрат вписана новая окружность, в эту окружность опять вписан квадрат, и т. д. до бесконечности. Начертить радиус круга, равновеликого сумме всех полученных кругов.

53. Не решая уравнений $x^2-y^2=k^2$ и $(x\pm a):y=m:n$, построить их корни.

54. Площадь данного сектора разделить пополам концентрической дугой.

55. Построить треугольник, зная a, m_a и $b\pm c$ (г. м. X, 17, III).

56. Линия центров OO_1 данных окружностей O и O_1 пересекает окружность O в точке A. Через точку A провести секущую AXY (X — на окружности O_1, Y — на окружности O) так, чтобы отрезок XY имел данную длину (обобщение задачи 7, IV).

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

Построить угол x, если

57. $\sin x=\frac{a}{b}$, $\cos x=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} x=\frac{a}{b}$, $\sin x=\frac{a\sin A}{b}$.

58. $\sin x=\frac{a^2}{b^2}$, $\cos x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg} x=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^4-b^4}}$.

59. $\sin x=\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$, $\cos x=\frac{a^4-b^4}{a^4+b^4}$, $\operatorname{tg} x=\frac{a^3-cb^2}{a^3+cb^2}$.

60. $\sin x=1:\left(2-\frac{b}{a}\right)$, $\cos x=\sqrt{2}:\left(\sqrt{3}+\frac{a}{b}\right)$, $\operatorname{tg} x=$ $=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Реш. Умножим числитель и знаменатель на a или b.

61. $a\sin^2 x+2a\sin x-b=0$, $b\cos^2 x-2a\cos^2 x+b=0$, $a\operatorname{tg}^2 x-2b\operatorname{tg} x+a=0$.

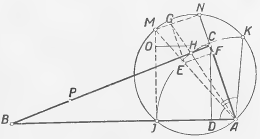
Многие задачи приводятся к определению некоторого угла. Взяв этот угол за неизвестное, можно получить тригонометрическое уравнение, которому должен удовлетворять искомый угол. Решив это уравнение, мы получим выражение, показывающее, как построить искомый угол. Если это построение выполнить, то останется сделать добавочные построения для получения искомой фигуры. Например:

62. *Построить треугольник, зная* $a-b=d$, $A-B=\varphi$ и $h_c=h$ (черт. 102).

$\triangle ABC$ — искомый. Задача приводится к определению A. Из треугольников ACD и BCD находим $a = \frac{h}{\sin B}$, $b = \frac{h}{\sin A}$, откуда

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{4 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}.$$

Полагая $A + B = 2x$, с помощью формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ получим $\cos^2 x + \frac{2h}{d} \cos x \cdot$



Черт. 102.

$\cdot \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\varphi + 1}{2} = 0$. Так как угол x менее $90°$, то отрицательный корень отбрасываем и, заметив, что $\cos\varphi + 1 = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}$, находим

$$\cos x = \frac{-h \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{h^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{d}.$$

Для построения угла x на стороне угла NAM, равного половине φ, откладываем $AM = d$ и $AE = h$. На диаметрах AM и AE чертим окружности до встречи с другой стороной угла в точках N и F. Тогда $AN = d \cos \frac{\varphi}{2}$, $EF = h \sin \frac{\varphi}{2}$. Отложим $NG = EF$, соединим A и G, на AG отложим $GH = EF$; тогда $\cos x = \frac{AN}{AM}$. Опишем дугу $(A,\ AH)$; тогда $\angle MAI = \angle KAM = x$. Угол $A = x + \frac{\varphi}{2}$, угол $B = x - \frac{\varphi}{2}$; поэтому $AA = \angle NAI$, $B = \angle NAK$.

Для построения $\triangle ABC$ на продолжении JM откладываем $IO = h$ и проводим $OC \parallel AD$. Затем строим $\angle OCB = \angle NAK$. Остается доказать, что $\triangle ABC$ — искомый. План поверки следующий. Из предыдущего видно:

$$a - b = \frac{h(\sin A - \sin B)}{\sin A \sin B} = \frac{4h \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}.$$

Подставив $A - B = \varphi$, $A + B = 2x$, а затем вместо $\cos x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ их значения, должны получить $a - b = d$.

Для возможности задачи нужно $AH < AM$. Нет никакой надобности выражать это условие через данные количества. Непосред-

ственное построение AH и AM покажет возможность задачи гораздо скорее [1]).

Построить треугольник, зная:

63. $a, b, S = k^2$. **64.** $a, C, S = k^2$.

65. $a, m_a, B - C$.

66. $b_C, A - B, a - b$.

67. A, a и $BD \pm AE$ (черт. 105).

68. $A, R \pm r, 2p$.

Реш. Выразим сначала $b + c - a$ через r.

68. $A, 2p, R:r$.

Реш. Определяется $b + c$ и a.

69. $A, b \pm c, h_a$.

70. В данный сектор вписать прямоугольник данной площади. (Два случая.)

71*. В данный сектор вписать прямоугольник, имеющий данную диагональ. (Два случая.)

72. Построить прямоугольный треугольник, зная гипотенузу и биссектор острого угла.

73. На биссекторе угла дана точка. Провести через нее секущую так, чтобы разность ее отрезков между сторонами и данной точкой была данной длины.

74. Дан угол и точка P на биссекторе угла, смежного с данным. Провести до сторон данного угла секущую PXY так, чтобы сумма $PX + PY$ была равна данной длине.

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ.

Иногда задача не поддается методам чистого геометрического построения. Причина этого может лежать в нашей ненаходчивости или в невнимании, но может лежать и в том, что задача неразрешима циркулем и линейкой.

Представим себе, что нам удалось составить уравнение вопроса, как это было в предшествовавших примерах. Если корни этого уравнения выражаются исключительно квадратными радикалами (вообще радикалами, показатель которых равен целой степени двух), то, как мы видели, задача решается циркулем и линейкой.

В математике строго доказывается обратное предложение [2]). Если корни полученного уравнения выражаются радикалами иной степени (третьей, пятой и т. п.), то задача неразрешима циркулем и линейкой. Эта теорема иногда позволяет сразу произнести требуемое суждение.

75*. *Построить квадрат, равновеликий данному кругу (квадратура круга).*

---

[1]) Такое явление наблюдается в громаднейшем большинстве задач на построение. Вследствие этого автор пропустил правила, определяющие, удовлетворяют ли корни уравнения данному неравенству.

[2]) Адлер, § 36, 7, „Теория геом. построений", Одесса 1910.

Уравнение вопроса будет $x = R\sqrt{\pi}$. Но так как известно, что число π не может быть выражено через квадратные радикалы [1]), то эта, знаменитая с древности, задача не может быть решена циркулем и линейкой. Последнее, однако, не мешает быть задаче разрешимой другими инструментами. Это замечание относится ко всем задачам, неразрешимым циркулем и линейкой. Чтобы судить о том, как выражаются корни данного уравнения, пользуются следующими теоремами.

I. Если кубичное уравнение вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то оно неразрешимо в квадратных радикалах* [2]).

K. Всякий рациональный корень уравнения вида $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$, *имеющего целые коэффициенты, должен быть делителем абсолютного значения числа* q, *причем этот делитель берется с двойным знаком* [3]).

Для следующей теоремы необходимо понятие о *резольвенте* уравнения 4-й степени. Если уравнение имеет вид

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1),$$

то, полагая $x = y - \frac{a}{4}$, приходим к уравнению $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$. Полагая $2y = u + v + w$, $u^2 + v^2 + w^2 = -2A$ и $uvw = -B$, для определения u^2, v^2 и w^2 получим уравнение $z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4C)z - B^2 = 0$, которое называется *резольвентой* уравнения (1).

Корни уравнения (1) связаны с корнями z_1, z_2 и z_3 его резольвенты соотношениями.

$$2y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad 2y_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$2y_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad 2y_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Таким образом, корни уравнения (1) выражаются суммой квадратных корней из корней резольвенты. Отсюда вытекает следующая теорема.

L. Уравнение 4-й степени вида (1) *с целыми коэффициентами разрешимо в квадратных радикалах только тогда, когда разрешается в квадратных радикалах его резольвента* [4]).

---

[1]) Доказано Линдеманом, „Math Ann", 20, 1882 и „Энциклопедия элементарной математики" Вебера и Велльштейна, т. I, стр. 525—535.

[2]) Адлер, § 36, 6, А, стр. 186.

[3]) Адлер, § 36, стр 188.

[4]) Мы ограничиваемся уравнениями 3-й и 4-й степени потому, что случаи получения уравнений высших степеней в интересующей нас области чрезвычайно редки. Для таких уравнений пользуются такой теоремой: *если уравнение нечетной степени не приводится к квадратному, то ему не может удовлетворять выражение, составленное из квадратных радикалов.*

В большинстве случаев указанных теорем достаточно, чтобы с сравнительной легкостью судить, — решается ли данная задача циркулем и линейкой. Именно, в полученном уравнении (третьей или 4-й степени) данные длины и углы заменяют числами с таким расчетом, чтобы получилось уравнение с целыми коэффициентами и чтобы коэффициент при высшей степени неизвестного был равен единице. Если уравнение кубичное, то, путем подстановки, испытывают все целые множители известного члена, взятые с двойным знаком,—не будут ли они корнями данного уравнения. Если этого нет, то задача неразрешима циркулем и линейкой. Если же имеем уравнение 4-й степени, то сначала получают его резольвенту, а потом поступают по предыдущему. При этом необходимо иметь в виду, что, если в частном случае корни уравнения выражаются квадратными радикалами, то это вовсе не значит, что *вообще* корни уравнения выражаются квадратными радикалами — это только значит, что мы напали на частный случай, в котором задача разрешается циркулем и линейкой. Противоположное заключение вполне справедливо, т. е., если задача в частном случае неразрешима циркулем и линейкой, то она будет таковой и в общем случае. Поэтому очень часто бывает выгодно решать задачу, начиная с ее частного случая. Вот примеры, разъясняющие сущность дела.

76*. *Делийская задача. Найти куб, объем которого вдвое больше объема данного куба.*

Уравнение вопроса будет $x^3 = 2a^3$, или, полагая $a = 1$, $x^3 - 2 = 0$. Так как целые множители числа 2, взятые с плюсом и минусом, не суть корни этого уравнения, то оно не может разрешаться в квадратных радикалах, и потому задача неразрешима циркулем и линейкой.

Вот пример употребления тригонометрических функций.

77. *Построить треугольник по данным трем биссекторам.*

Реш. Начинаем с равнобедренного треугольника. Пусть в $\triangle ABC$ биссекторы: $AE = CK = l$ и $BD = h$, $\angle BAE = x$. Тогда $\angle AEB = 3x$ и $\angle ABC = 180^\circ - 4x$. Определяя AB, находим $\frac{h}{\sin 2x} = \frac{l \sin 3x}{\sin 4x}$ или $h = \frac{l \sin 3x}{2 \cos 2x}$ (сокращение на $\sin 2x$ удаляет негодный корень $x = 90^\circ$). Полагая $l = 2h$, находим $\cos 2x = \sin 3x$, откуда $x = 18^\circ$. Это показывает, что в выбранном частном случае задача решается циркулем и линейкой. Полагаем $l = 4h$, находим

$$1 - 2\sin^2 x = 2(3\sin x - 4\sin^3 x),$$

или

$$8\sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0.$$

Если

$$\sin x = \frac{z}{4}, \text{ то } z^3 - z^2 - 12z + 8 = 0.$$

Множители числа 8, взятые с двойным знаком, не суть корни этого уравнения. След., это уравнение не разрешается ни в рацио-

нальных числах, ни в квадратных радикалах, и задача неразрешима циркулем и линейкой.

78. *Построить квадрат ABCD так, чтобы вершина A и B были на одной данной окружности O, а вершины C и D — на другой данной окружности* O_1 (черт. 103).

Пусть одна окружность расположена вне другой и OO_1 встречает AB и CD в M и N, $OA = a$, $O_1C = b$, $OO_1 = d$, $BC = x$, $OM = y$. Тогда $y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2$, $(d - x - y)^2 + \frac{x^2}{4} = b^2$. Полагая $a^2 - b^2 = c^2$, получим уравнение

$$c^4 + (d - x)^4 + 2c^2(d - x)^2 + x^2(d - x)^2 = 4a^2(d - x)^2 \quad (1).$$

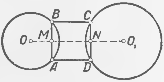
Для простоты положим $a = b$; тогда $c = 0$ и уравнение после сокращения на $(d - x)^2$ приводится к уравнению $x^2 - dx + \frac{d^2 - 4a^2}{2} = 0$ (2). Сокращение на $(d - x)$ удалило корень $x = d$, годный, очевидно, только для случая касания данных равных окружностей. В этом случае задача, действительно, легко решается. Уравнение (2) при $8a^2 \geqslant d^2$ дает еще два годных решения. Но, однако, таким образом мы вовсе еще не подвинулись в вопросе, разрешима ли вообще данная задача циркулем и линейкой.

Развертывая уравнение (1), получаем

$$x^4 - 3dx^3 + \frac{2c^2 + 7d^2 - 4a^2}{2}x^2 + (4a^2d - 2d^3 - 2c^2d)x +$$
$$+ \frac{(c^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2}{2} = 0.$$

Чтобы получить уравнение с целыми коэффициентами, нужно вместо c и d подставлять четные числа, а потому полагаем: $a = 5$, $b = 3$, $d = 4$ и, след., $c = 4$. Получаем уравнение

$$x^4 - 12x^3 + 22x^2 + 144x - 288 = 0.$$



Черт. 103.

Резольвента этого уравнения будет $z^3 - 64z^2 + (32^2 - 4.99)z - 60^2 = 0$ или, полагая $z = 2t$, $t^3 - 32t^2 + 157t - 450 = 0$ (2). Целые отрицательные делители числа 450 не могут быть корнями этого уравнения. Испытывая затем все положительные делители числа 450, убеждаемся, что они не удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, уравнение (1) не разрешается в квадратных радикалах, и задача вообще не может быть разрешена циркулем и линейкой.

79. *Начертить четырехугольник известной формы так, чтобы две вершины его лежали на одной данной окружности, а две другие — на другой окружности.*

Неразрешимость этой задачи для циркуля и линейки вытекает из того, что ее частный случай неразрешим (77, III).

Если мы знаем, что некоторая задача неразрешима циркулем и линейкой, то этот факт можно использовать, кроме указанных приемов, следующим способом. Пусть нам известно, что задачи №№ 96 и 93, III вообще неразрешимы циркулем и линейкой, как оно и есть на самом деле. Разберем тогда следующие две задачи.

80. *На данной прямой найти точку X, связанную с данными отрезками AB и CD соотношением* $2\angle AXB = 3\angle CXD$.

Допустим, что эта задача решена циркулем и линейкой. Уравняем полученные углы. Для этого $\angle AXB$ берем два раза, а $\angle CXD$ — три раза, сохраняя вершину X неподвижной. В полученных углах проведем произвольные отрезки MN и PQ — они будут видны из X под равными углами, и задача № 96 решена циркулем и линейкой в общем случае. Следовательно, наше предположение неверно. Вместо равенства $2\angle AXB = 3\angle CXD$ можно взять равенство $p\angle AXB = q\angle CXD$, где p и q суть какие угодно конечные числа.

81. *На данной прямой CD найти точку X, связанную с данными точками A и B равенством* $2\angle AXB = \angle DXB$.

Если точки A и B по обе стороны CD, то задача легко решается. Но допустим, что вопрос решается циркулем и линейкой и для того случая, когда A и B лежат по одну сторону CD. Тогда угол AXD разделен на три равные части циркулем и линейкой. Меняя положение A и B, мы будем получать углы AXD различного типа и, по принципу непрерывности, можем получить угол такого типа, который трисекции не поддается. Следовательно, наше предположение неверно, в чем можно убедиться и другими способами (подобно 79, III). Такого рода заключение в данном случае не вполне строго. Однако нельзя совсем пренебрегать этим способом — по крайней мере, автору этот способ ни разу не дал неверного результата.

Интересующий нас вопрос может быть разрешен еще аналитической геометрией. Пусть задача сводится к определению некоторой точки X. Отбрасывают одно из условий, которым подчинена точка X. Тогда точка X опишет некоторую кривую; составим уравнение этой кривой в каких-нибудь координатах. Затем отбрасываем другое условие для точки X, взяв во внимание ранее отброшенное условие.

Тогда точка X опишет новое геометрическое место. Если эта новая кривая нам неизвестна, то выведем ее уравнение, *взяв ту же систему координат*. Чтобы судить, разрешимы ли полученные два уравнения в квадратных радикалах, пользуются теоремами K, J и L. Но иногда еще короче пользоваться следующими теоремами:

M. Точку пересечения двух независимых конических сечений, а тем более двух независимых кривых высших порядков, вообще нельзя построить циркулем и линейкой.

N. Циркулем и линейкой можно построить точку пересечения независящих друг от друга прямой и кривой только тогда, когда эта кривая есть коническое сечение.

P. Точку пересечения независящих друг от друга кривой и окружности можно построить циркулем и линейкой только тогда, когда эта кривая будет прямой или окружностью.

Q. Точка касания касательной, проведенной к кривой из независящей от нее точки, определяется циркулем и линейкой только тогда, когда эта кривая есть коническое сечение.

Особенное внимание надо обратить на то, что точки, о которых говорят эти теоремы, часто могут быть построены циркулем и линейкой, если *кривые*, на которых они лежат, *зависят друг от друга*. Так в № 54, IV определяется точка пересечения двух конических сечений именно потому, что оба сечения имеют один общий фокус и, следовательно, не могут изменяться совершенно независимо друг от друга.

Если мы желаем пользоваться этими теоремами, то при выводе уравнения можно менять координатную систему, лишь бы скорее выяснить порядок тех двух кривых, на которых лежит искомая точка. Обыкновенно бывает достаточно знать свойства следующих кривых.

R. Геометрическое место точки X, удовлетворяющей равенству $AX \pm BX = k$, где A и B суть данные точки и k — постоянное, есть коническое сечение.

S. Если точка X находится от данной точки и от данной прямой в расстояниях, сохраняющих постоянное отношение, то точка X лежит на коническом сечении.

U. Если из точки A проведем к данной прямой луч AB и на нем отложим отрезок BX постоянной длины s, то геометрическое место точки X есть *конхоида*; ее уравнение есть $(y-p)\sqrt{x^2+y^2}=sy$, A — начало прямоугольных координат, p — расстояние A от данной прямой, ось X-ов параллельна данной прямой.

V. Если между двумя прямыми проведем где-нибудь отрезок XY постоянной длины и на продолжении его отложим другую постоянную длину YZ, то геометрическое место точки Z будет коническое сечение.

W. Если внутри угла через данную точку проведен отрезок, то геометрическое место середины этого отрезка есть коническое сечение.

82. *Даны угол BAC и точка. Через эту точку провести окружность, пересекающую стороны угла по хордам данной длины.*

Положим, что данный угол равен 90°; примем его стороны за оси координат. Пусть искомые хорды будут $DE=2a$ и $FG=2b$, $O(x, y)$ — искомый центр, $OD=R$ и $M(c, d)$ — данная точка. Если оставим в стороне точку M, то уравнение точки O будет $x^2+a^2=y^2+b^2$, т. е. точка O опишет гиперболу. Если же оставим в стороне одну сторону угла, то уравнение точки O будет $(x-c)^2+(y-d)^2=$ $=y^2+a^2$; это есть уравнение параболы, вершина которой в точке $\left(c, \frac{d^2-a^2-c^2}{2d}\right)$.

Если вращать отброшенную сторону угла около начала и изменять отрезок b, парабола не изменяется. Поэтому вообще задача неразрешима циркулем и линейкой. В частном случае, напр., при $a=b$, за-

дача должна решаться циркулем и линейкой (N). Так оно и есть (138, IV, или, наконец, при $a=b=0$, 267, II).

83. В данном угле провести отрезок данной длины так, чтобы он проходил через данную точку (U).

Примечание. Ниже мы увидим, что эту задачу можно решить очень простыми средствами, между тем как циркуль и линейка являются на этот раз беспомощными инструментами.

84. Через данную точку A провести к данному углу секущую AXY так, чтобы $AX-AY=k$.

85. Даны две прямые и на них по точке, A и B. Провести секущую XY так, чтобы $AX:BY$ было данное и чтобы XY касалась данной окружности E.

Реш. Если ω есть центр вращения, совмещающего AX с BY, K — точка касания, то перенесем параллельно KX в EG. Пусть ωX встречает EG в F. Тогда можно построить $\triangle GFX$ (U).

86. Построить треугольник, зная a, c и $B-C$ (44, I, U).

87. Построить треугольник, зная a, c и $2A+C$ (44, I, U).

88. Через точку A провести к данной прямой и окружности секущую AXY так, чтобы $AX\pm AY=k$ (84, III).

89. Даны точки A, B и C и окружность. Отыскать точку X так, чтобы $AX\pm BX$ и $CX\cdot CD$ (D — пересечение CX с окружностью) были данной величины.

90. На данной окружности найти точку, отношение расстояний которой до данной прямой и до данной точки было бы данное (т. S).

91. Даны точки A, B, C и D. Отыскать точку X так, чтобы $AX+BX$ и $CX-DX$ были данной величины (т. R, M).

92*. Построить окружность, пересекающую три данные прямые по трем хордам данной различной длины.

93*. *Трисекция угла.* Данный угол разделить на три равные части.

Реш. Из уравнения $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$, полагая $2\cos 3a=m$, $2\cos a=x$, находим $x^3-3x-m=0$. Это уравнение вообще неразрешимо в квадратных радикалах ($m=\pm 1$), но в частности может иметь сколько угодно корней, выраженных квадратными радикалами (47, II). Углы, трисекция которых доступна циркулю и линейке, определяются из уравнения $2\cos 3a=s^3-3s$, где s есть произвольное число, которое можно построить циркулем и линейкой, имея длину, принятую за единицу. Второй тип искомых углов есть $n\pi$ (47, II).

94*. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник, зная высоту на одну из равных сторон.

95. На данной окружности найти точку X так, чтобы отношение квадратов касательных, проведенных из X к другим данным двум окружностям, было данное (105, IV).

96. На данной прямой найти точку X, связанную с данными отрезками AB и CD равенством $\angle AXB=\angle CXD$.

97. Даны прямая AB и две точки, M и N, по одну ее сторону. На AB найти точку X так, чтобы $\angle MXN=2\angle NXB$.

98. Даны две точки, A и B, и окружность. Провести к ней касательную MXN так, чтобы $\angle\angle AXM$ и BXN были равны.

99. Даны три прямые. Провести к ним секущую XYZ так, чтобы отрезки XY и YZ имели данные значения (V, 22 и 455, II).

100. Даны две окружности и прямая. Провести к ним секущую XYZ так, чтобы XY и YZ имели данные значения (V).

101. Данный треугольник поместить вершинами на данных трех окружностях (99, III).

102. В данную окружность вписать четырехугольник так, чтобы две противоположные стороны пересекались в данной точке под данным углом, а третья сторона проходила бы через другую данную точку (ср. с 63, IV).

103. Окружности O и O_1 пересекаются в A и B. На дуге AB окружности O дана точка M. Провести секущую MXY (X — на окружности O_1, Y — на окружности O) так, чтобы длина XY была данная.

Реш. Эта задача есть обобщение задач 83 и 56, III.

104. Даны точки A, B, C и окружность (или прямая) O. Провести через A и B окружность, пересекающую O в точке X так, чтобы CX была касательной к искомой окружности (N и P, ср. с 12, III).

105. Через данную внутри угла точку провести отрезок, делящийся данной прямой (или данной окружностью) пополам (W).

106. Построить треугольник, зная b_A, b_C и h_b.

107. Построить треугольник, зная b_A, b_C и m_b (77, III).

108. Даны точки A и B и прямая CD. Построить $\angle XYB$ так, чтобы он прямыми AY и CD делился в отношении $1:3$, точка же Y была на CD.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ [1]).

1. В $\triangle ABC$ провести отрезок BD (точка D на AC) так, чтобы $BD^2 = AD \cdot DC$ (88, I и 129, II).

2. Из вершин данного треугольника, как из центров, описать три попарно касающиеся окружности (112, II).

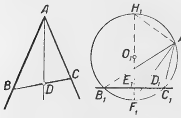
3. Провести к окружности касательную в данной на ней точке, если нет возможности определить центр (57, I).

4*. Даны окружность и точка A. Провести секущую ABC (B и C на окружности) так, чтобы $BC^2 = AC \cdot AB$, или чтобы $AB^2 = AC \cdot BC$ (312, II).

5. Даны три прямые. Провести в известном направлении секущую xyz так, чтобы $xy^2 = xz \cdot yz$.

6. Дана прямая $ABCD$. Провести две касательные окружности, первую через A и B, вторую — через C и D, так, чтобы сумма радиусов была равна данной прямой.

7*. *Задача Паппа. На биссекторе угла дана точка. Через эту точку провести прямую, дающую в угле отрезок определенной длины* (черт. 104).



Черт. 104.

Реш. Опишем на данном отрезке B_1C_1 дугу, вмещающую угол A, и восставим из середины B_1C_1 перпендикуляр.
Из подобия треугольников $E_1F_1D_1$ и $A_1F_1H_1$ находим $F_1B_1^2 = F_1D_1 \cdot A_1F_1 = H_1F_1 \cdot E_1F_1 = C_1F_1^2$, откуда можно найти A_1F_1 (173, II). См. также 108, I.

Построить треугольник, зная:

8. A, a и биссектор угла смежного с углом A (7, IV и 109, I).

---

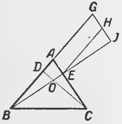
[1]) Большинство задач этого отдела решается чистым построением и лишь весьма немногие — приложением алгебры к геометрии.

9. $a+b$, b_C и $B-A$ (47, I и 7, IV).
10. $a+b$, h_c и $B-A$ (7, IV).
11. h_b, b_B и $a+c$ (47, I и 7, IV).
12. a, c и $B-C=90^\circ$ (44, I и 8, IV).
13. a, $A=90^\circ$ и b_B (110, I).
14. A, r, S или A, $2p$ и S. **15.** h_a, $2p$, r.
16. A, ρ_a, $b+c-a$ (58, I). **17.** $2p$, r, ρ_a ($\triangle MAN$, 58, I).
18. a, r, ρ_a (58, I). **19.** r, ρ_a, $b-c$ (58, I).
20. A, S и отношение, в котором делится a в точке касания вписанной окружности (68, I).
21. A, a, $b^2:c^2$. **22.** m_b, m_c и $c:b$.
23. A, a и $h_b \pm h_c = s$.

Реш. Перенесем (черт. 105) $\triangle ADC$ в положение $\triangle EHJ$ так, чтобы $BJ=s$; EH перенесем в AG. Тогда можно построить $\triangle BGJ$ (364, II). Вместо a можно дать R, r, m_a и т. д.

24. S, A и $(h_b-h_c):a$.
25. A, a и сумму отрезков $AD+AE$ (черт. 105, 364, II). Вместо a можно дать $2p$, R, r.
26. Сумму высот $CD+BE$, сумму отрезков $AD+AE$ и R.
27. A, R и $BD+EC$ (черт. 105).

Реш. Повернем $\triangle OEC$ так, чтобы $\angle COE$ совпал с $\angle BOD$, и сделаем перенесение. Тогда можно найти $BO+OC$.



Черт. 105.

28. R, h_b и b_B или m_b, h_b и b_B (71, I).
29. a, $\angle(h_b, h_c)$ и h_a (65, I). **30.** a, A и $\angle(h_b, m_a)$ (65, I).
31. A, ρ_a, ρ_b (67, I). **32.** A, a, r (68, I).
33. R, r, h_a (95, I). **34.** h_a, h_b и r.
35. ρ_b, ρ_c и $B-C$ (72, I). **36.** a, ρ_b и ρ_c (72, I).
37. ρ_b, ρ_c и $c+b$ (72, I). **38.** $b-c$, r и $B-C$ (442, II).
39. A, r, $b-c$ (446, II). **40.** $BD=b_B$, $AB-AD$, $BC-CD$.

41. Найти точки касания к сторонам треугольника внешних вписанных окружностей, не определяя их центров и радиусов (58, I).

42. Дана окружность и касающиеся к ней прямые AB и AC; провести к этой окружности касательную так, чтобы отрезок ее между AB и AC был определенной длины (58, I).

43*. Прямая ED пересекает параллелограм $ABCD$. Отыскать на ней точку X так, чтобы сумма углов AXB и CXD равнялась двум прямым (428, II).

44*. Даны прямые AB, AC и AD и еще окружность O. Провести окружность, касательную к окружности O так, чтобы в пересечении искомой окружности с данными прямыми получился треугольник известной формы (371, II, вместо окружности можно дать прямую или точку, через которую должна проходить искомая окружность).

45. Дана точка A и окружность. Провести секущую ABC так, чтобы разность $AB-BC$ была данной длины (380, II).

46. В данный $\triangle ABC$ вписать четырехугольник $XYZU$, зная его углы и одно из соотношений: $YZ = XY \pm ZU$, $YZ^2 = XY \cdot ZU$, $YZ^2 = XY^2 \pm ZU^2$ и т. п. (17, III).

47. Через данную точку N провести прямую так, чтобы сумма ее расстояний от данных точек A, B и C равнялась ее расстоянию от данной точки M (105, I).

48. Начертить треугольник, равный данному, так, чтобы каждая его сторона проходила соответственно через данную точку.

49. Построить треугольник так, чтобы основания его высот находились в данных точках (94, I).

50. Построить многоугольник, зная положение перпендикуляров, восставленных из середин сторон [1]).

Реш. Пусть A есть одна из искомых вершин, X — произвольная точка. Будем приводить AX в последовательные положения, симметричные относительно данных прямых. Тогда A придет в прежнее положение, а X — в X_1; длина $AX = AX_1$, и для окончательного определения A надо взять вместо X другую точку.

51. Построить многоугольник, зная положение его биссекторов (50, IV).

52. Даны точки A и B. На данной прямой отыскать точку X так, чтобы $AX \pm BX$ имела данное значение (т. R).

53. Даны точки A и B. В равном расстоянии от B и от данной прямой отыскать точку X так, чтобы $AX \pm BX$ была данной длины (т. R, S).

54. В данном $\triangle ABC$ отыскать точку X так, чтобы периметры треугольников AXB, AXC и BXC были равны (327, II).

55. Дан угол B и точка D. Через B и D провести окружность так, чтобы сумма отрезков сторон угла в окружности была данная.

56. На биссекторе угла A дана точка D. Провести секущую CDB так, чтобы $AC \pm AB$ была данная (49, I, 351 или 484, II).

57. В окружности провести в известном направлении хорду CD так, чтобы она делилась в данном отношении хордой AB.

Реш. Проведем $CE \parallel AB$ (182, II).

58. Даны окружность O и точки A и B. На окружности отыскать такую точку M, чтобы прямые AM и MB в пересечении с окружностью дали хорду, параллельную AB (70, I).

59. Дана окружность и точки A и B. На окружности отыскать такую точку M, чтобы прямые AM и MB в пересечении с окружностью образовали хорду CD, параллельную данной прямой PQ.

Реш. Пусть хорда $DK \parallel AB$, и E есть пересечение прямых AB и CK. Тогда можно определить положение точки E ($AM \cdot AC = BA \cdot AE$, $\angle CDK$ известен, 58, IV).

60. В окружность O вписать треугольник, стороны которого проходили бы через три данные точки A, B и C.

---

[1]) Это значит, что даны прямые, по которым направлены перпендикуляры.

Реш. Если искомый $\triangle LMD$ образован секущими ALM, BDM и CDL, то проведем хорду $DK \parallel AB$, и пусть E — пересечение AB и LK. Положение точки E можно определить (59, IV); затем можно построить $\triangle LDK$.

61. Найти геометрическое место точек, из которых две данные окружности видны под равными углами (г. м. XII, γ).

62. Определить точку, из которой три данные окружности видны под равными углами (61, IV).

63. В данную окружность вписать четырехугольник, зная точку встречи двух противоположных сторон, пересекающихся под прямым углом, и точку, через которую проходит третья сторона.

64. 1) Через данную точку M провести окружность, касающуюся данной окружности и пересекающую другую данную окружность так, что общая их хорда проходит через данную точку A (86 и 88, I).

2) Через две данные точки провести окружность, пересекающую данную окружность по хорде данной длины.

65. Между данными точкой A и окружностью O провести отрезок так, чтобы сумма (или разность) расстояний его середины до A и O были данной длины (55, III).

66. Внутри или вне данной окружности построить три, четыре или n равных окружностей, касающихся как данной окружности, так и между собой.

67. К двум окружностям провести касательную окружность так, чтобы прямая, соединяющая точки касания, прошла через данную точку.

68*. К двум данным окружностям провести третью касательную к ним окружность так, чтобы прямая, соединяющая точки касания, имела данную длину.

69. Даны точки A и B. На данной окружности отыскать точку M так, чтобы прямые AM и MB в пересечении с окружностью дали хорду наибольшей или наименьшей величины (54, I).

70. На данной прямой отыскать точку, из которой данный отрезок был бы виден под наибольшим углом (54, I).

71. Описать окружность через данную точку так, чтобы она делилась пополам данной окружностью O и встретила другую окружность O_1 под прямым углом.

72. Построить треугольник данного периметра так, чтобы вершины его лежали на данных пересекающихся окружностях и две стороны проходили через точки встречи окружностей.

73. Через данную точку провести к двум касательным окружностям секущую так, чтобы из точки касания часть секущей между окружностями была видна под прямым углом.

74. В $\triangle ABC$ вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина была на стороне BC в точке D.

Реш. Стороны DE и EF, DF и EF должны составить с AB и AC равные углы (341, II), а потому EF проходит через отражение точки D.

75. В данный сектор вписать треугольник наименьшего периметра (74, IV).

76. В данный $\triangle ABC$ вписать треугольник EDF наименьшего периметра (точка D — на BC).

Реш. Отразим D в AB и в AC. Ломаная $GEFH$ должна обратиться в прямую. Так как $\angle GAH = 2\angle A$, то в окружности (A, D) хорда GH станет наименьшей при $AD \perp BC$. Искомый треугольник имеет вершины в основаниях высот данного $\triangle ABC$. Задача возможна только для остроугольного треугольника [1]).

77. В $\triangle ABC$ найти точку X так, чтобы радиусы окружностей AXB, AXC и BXC были между собой равны.

Реш. $\angle ABX = \angle ACX$, $\angle BAX = \angle BCX$ и $\angle CAX = \angle CBX$; отсюда видно, что X есть ортоцентр треугольника.

78. В данный правильный многоугольник вписать такой же многоугольник так, чтобы сторона его имела данную длину (γ).

79. В данный треугольник вписать треугольник известной формы так, чтобы он имел наименьший периметр (329 и 136, II).

80. Построить четырехугольник известного вида, стороны которого проходили бы через 4 данные точки (69, I).

81. Даны две параллели, точка A на одной из них и точка B. Провести через A и B две параллели, образующие с данными параллелями параллелограм данного периметра (154, II).

82. В данный четырехугольник вписать четырехугольник, подобный другому данному четырехугольнику (69, I).

83. В данную окружность вписать четырехугольник $ABCD$, зная угол диагоналей и диагональ AC, если в этот четырехугольник можно вписать окружность (69, I).

Реш. Биссекторы углов A и C, проходя через середины дуг, опирающихся на BD, определяют центр вписанной окружности.

84. Через данную точку провести к данным двум окружностям секущую так, чтобы ее отрезок между окружностями делился пополам радикальной осью данных окружностей (404, II).

85. Около данной окружности описать треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, проведенных из центра.

Реш. Можно определить углы треугольника.

86. Вывести следующие соотношения для треугольника:

$$1)\ S = \frac{\rho_a(b+c-a)}{2},\quad 2)\ \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c},\quad 3)\ S^2 = r\rho_a\rho_b\rho_c,$$

$$4)\ S = \frac{r(a+b+c)}{2},\quad 5)\ \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\ \text{и}\ 6)\ \frac{2}{h_a} = \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}.$$

Построить треугольник, зная:

87. ρ_a, ρ_b и ρ_c (87, IV).

88. h_a, r и $h_b : h_c$.

89. r, ρ_a и h_a (86, IV).

90. r, ρ_a и S.

---

[1]) Интересующиеся чисто геометрическими методами нахождения maximum и minimum найдут их в моей записке „Геометрические методы разыскания maximum и minimum". Москва, 1892 г.

91. h_a, h_b, r. **92.** a, m_a и $b \pm c$ (374, II).

93. h_a, m_a, $B - C$ (черт. 76).

94. m_a, $\angle (a, m_a)$ и одно из следующих данных $b \pm c$, bc, $b:c$, $b^2 \pm c^2$ (черт. 76).

95. A, R и отношение, в котором разделена AB точкой касания внешней вписанной окружности.

96. A и радиусы кругов, вписанных в треугольники, на которые делится искомый треугольник высотой h_a.

97. $2p$, h_a и $B - C$ (439, II).

98. Положение центра O [1]) и концов h_a и b_A (127, II).

99. Положение точек: A, O и O_a [1]).

100. Положение точек: A, O и центра окружности Эйлера (окружность, проходящая через середины сторон [2]).

101. Положение точек: O, o и O_a [1]).

102. Даны несколько параллелей и две точки, A и B. Провести данной длины ломаную $AXYZ\ldots UB$ так, чтобы X, Y, $Z\ldots U$ были на параллелях и чтобы каждый отрезок XY, $YZ,\ldots$ имел данное направление.

Реш. Надо выключить постоянную сумму отрезков из периметра параллельным перенесением (52, IV).

103. На окружности даны точки A и B. В известном направлении провести хорду XY так, чтобы $AX:BY$ (или $AX \cdot BY$) было данной величины.

104. В $\triangle ABC$ провести в известном направлении отрезок XY (X — на AB, Y — на BC) так, чтобы $BX:YC$ (или $BX \cdot YC$) было данной величины.

105. Даны точки A и B. Найти геометрическое место точки X, если $AX^2 \pm p \cdot BX^2 = k^2$, где p есть данное число.

106. Даны точки A, B и C. Провести через B прямую так, чтобы ее расстояния AX и CY от A и C удовлетворяли равенству $p \cdot AX \pm q \cdot CY = k$, где p и q данные числа (387, II).

107. Даны три концентрических окружности. Провести секущую $XYZU$ (X — на большей, Z и U — на меньшей окружности) так, чтобы $XY:ZU$ было равно данной величине (96, I).

108. Даны две пересекающиеся окружности. Провести к ним секущую, которая давала бы между окружностями три равных отрезка (97, I).

109. Построить треугольник, зная a, c и отрезок BD, так, чтобы AD было равно проекции стороны a на сторону b (107, IV).

110. В данном угле найти точку так, чтобы ее расстояния x и y до сторон угла удовлетворяли равенству $px \pm qy = k$, где p и q суть данные числа.

---

[1] Через O, o и O_a обозначены центры описанной, вписанной и внешней вписанной окружности.

[2]) Эта окружность проходит через основание высот и через середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, и потому называется *окружностью девяти* точек. Для решения задачи 100, IV только что упомянутые свойства окружности Эйлера не нужны.

111. Построить треугольник, зная отрезки AD и DC, образованные высотой BD, если известно, что $\angle ABD = A + C$ (25, III).

112. Если два четырехугольника имеют соответственно равными углы и углы между диагоналями, то они подобны (48, I и 493, II).

113. Если два четырехугольника имеют соответственно равные углы и одинаковое отношение диагоналей, то они могут быть подобными и неподобными (495, II).

114. Построить четырехугольник, зная углы, отношение диагоналей и площадь (495, II).

115. Даны точки A, B и C. Провести две параллели, одну — через A, так, чтобы разности квадратов их расстояний до B и C были данного значения.

Реш. Перенесем параллельно вторую параллель на первую. Тогда задача приводится к задаче, аналогичной с 164, II.

116. Даны две окружности O и O_1 и точки A и B на первой из них. На ней же найти точку X так, чтобы прямые AX и BX определили в другой окружности хорду CD данной длины (v).

Реш. Повернем CA около O_1 на угол CO_1D; тогда CA примет положение DA_1, и угол A_1DB будет равен сумме или разности данных углов AXB и CO_1D.

117. Через данную точку D провести прямую, отсекающую от данного угла $\triangle ABC$ данной площади („De sectione spatii" Аполлония).

Реш. Если D вне угла B, то проведем секущую DEF так, чтобы $\triangle DBF$ (F лежит на BC) был равновелик $\triangle ABC$ (193, II); тогда $\triangle DFC - \triangle ADE = \triangle BDE$. Отсюда определим отношение AE и FC, и задача приведется к 483, II. Если D внутри угла, то можно будет найти $AB:CF$.

118. Бильярд имеет форму многоугольника $ABCD\ldots$; лежащий на нем шар M ударить так, чтобы он, отразившись от всех сторон, начиная с AB, попал в другой шар N.

Реш. Точку M заменяем отражением ее M_1 в AB; тогда вместо M можно взять M_1 и поступать так дальше, пока не дойдем до точки X отражения в последней стороне. Прямая XN определит на последней стороне точку, от которой можно вернуться к точке M.

119. Даны прямая MN и две точки, A и B, по обе ее стороны. Найти на этой прямой точку X так, чтобы разность углов BXM и AXM была наибольшая.

Реш. Наложим $\angle BXM$ на $\angle AXM$; тогда точка B придет в известную точку, и задача приведется к 70, IV.

120. Даны отрезки AB и DE. Провести в известном направлении секущую XY (X — на DE, Y — на AB) так, чтобы $\angle\angle AXY$ и BXY были равны (351, II).

121. Трапецию разделить на n равновеликих частей ломаной линией, сгибы которой лежат на сторонах (193, II).

122. От данного многоугольника отделить прямой, проходящей через вершину, часть, равновеликую данной фигуре.

123. 1) Четырехугольник разделить на три равновеликие части прямыми, проведенными из двух точек, данных на его основании (190, 193, II).

2) Треугольник разделить на три равновеликие части прямыми, проведенными из данной точки (117, IV).

124. В треугольнике ABC провести в известном направлении отрезок DE (D — на AB, E — на BC), средний пропорциональный между отрезками AB и DB.

Реш. Отложим $DE_1 = DE$ (88, I).

125. Построить равнобедренный треугольник так, чтобы основание его было на одной данной прямой, вершина — на другой данной прямой, а боковые стороны проходили через две данные точки (351, II).

126. Построить равнобедренный треугольник, зная S и $(b + h_b) : a$.

127. В данную окружность вписать трапецию, зная расстояние параллельных сторон и угол между диагоналями.

128. На двух окружностях дано по точке A и B. На их радикальной оси CD найти точку E так, чтобы прямая, соединяющая точки F и G, в которых EA и EB встречают окружности в другой раз, была параллельна линии центров.

Реш. Пусть A_1 и F_1 будут отражения A и F в CD. Около фигур $FABG$ и GBA_1F_1 можно описать окружности; точки A, B, A_1 и E лежат на одной окружности.

129. На одной стороне прямого угла даны точки A и B; найти на другой стороне точку X так, чтобы $\angle AXB$ был вдвое более угла ABX.

Реш. Опустим $AZ \perp BX$; $\triangle AXZ$ повернем на 180° около AZ и определим Z. См. также 85, I.

130. Для измерения высоты горы AB на поверхности земли измерен базис CD, из концов которого AB представляется под углами α и β; с вершины горы A базис CD виден под углом γ. Найти высоту горы.

Реш. Построим треугольники abc и abd, подобные треугольникам ABC и ABD; затем построим $\triangle efg$, в котором $\angle efg = \gamma$, $ef = ac$ и $fg = ad$; тогда высота горы будет $ab \cdot CD : eg$. Вместо угла γ можно дать $\angle CBD$, который на практике найти легче.

131. Даны точки A и B и между ними две параллели CD и EF. Провести секущие AXY и BYZ (X и Z — на CD, Y — на EF) так, чтобы $XY = XZ$.

Реш. Перенесем параллельно XZ в AH; тогда $AY = AH$, и можно определить основание перпендикуляра из A на YH.

132. Решить предыдущую задачу так, чтобы $YZ = XY$.

Реш. Как и в предыдущей задаче, опустим $BK \perp AH$.

133. Две вертикальные трубы одинаковой высоты — AB и CD — видны под углами α и β из точки E, находящейся на прямой BD, соединяющей основания труб. Если от точки E пройти по данной прямой EF известное расстояние $EF = a$, то из F обе трубы представятся под углами зрения, равными γ и δ. Определить BD и AB без помощи тригонометрии (130, IV).

134. Даны четыре прямые. Провести пятую прямую так, чтобы полученные между данными прямыми три отрезка были в данном отношении (γ, 69, I).

135. Даны точка и две окружности. Провести через данную точку новую окружность, касательную к одной данной окружности и пересекающую пополам вторую данную окружность.

136. В данный сектор AOB вписать прямоугольник $MNPQ$ данного периметра.

Реш. Если на дуге должны лежать две вершины, N и P, то отложим на биссекторе угла O полупериметр OC и проведем $MD \parallel NC$. Форма фигуры $OMDQ$ известна.

137. Через точки A и B провести окружность, встречающую данные две параллели в X и Y так, чтобы отрезок XY имел данное направление (138, IV).

138. Даны две прямые и точка A. Провести в известном направлении отрезок ZU (Z — на первой, U — на второй прямой) так, чтобы $ZU^2 - UA^2$ было равно k^2.

Реш. Если точка A — на второй прямой, то на перпендикуляре в A отложим k (267, II). На этот случай легко свести и общий случай. Если $UA > ZU$, то задача приводится к частному случаю задачи 516, II.

139. В $\triangle ABC$ вписать $\triangle abc$ так, чтобы длина bc и направления двух других сторон были известны.

Реш. Окружность bac встретит сторону в d; можно определить bd и cd (329, II).

140. В $\triangle ABC$ вписать подобный ему треугольник так, чтобы одна сторона его проходила через данную точку.

Реш. Впишем какой-нибудь $\triangle abc$, подобный $\triangle ABC$, и найдем центр вращения, принимая точки A и a, B и b за соответственные. Остается $\triangle abc$ умножить и повернуть известным образом.

141. Даны две окружности. Провести к ним по касательной так, чтобы они пересекались под данным углом и чтобы прямая, соединяющая точки касания, проходила через данную точку K.

Реш. Определим центр вращения, принимая данный угол за угол вращения окружностей. При вращении K перейдет в K_1, из которой достаточно провести касательную.

142. Даны три окружности и на них по точке A, B и C. Провести секущую XYZ так, чтобы дуги AX, BY и CZ были подобны.

Реш. Сходно с 492, II. В данном случае $\angle XYZ = 180°$, но он может иметь вообще данную величину.

143. Вписать в данную окружность треугольник так, чтобы его высоты соответственно проходили через данные на окружности три точки.

Реш. Впишем окружность в данный треугольник.

144. В данной окружности провести две хорды определенной длины так, чтобы они пересекались под данным углом, и прямая, соединяющая их середины, проходила через данную точку.

145. Даны $\angle BAD$ и точка C. В известном направлении провести в этом угле отрезок XY так, чтобы $\angle XCY$ был данной величины.

146. Дан угол B и точка A. Вписать в него $\triangle AXY$ так, чтобы площадь треугольника AXY и $\angle BXY$ были данной величины. Вместо площади можно дать $AX \cdot AY$, $XY \pm AZ$ (AZ — высота), $XY : AZ$ и т. п.

147. Даны две окружности, прямая BC и на ней точка A. Найти на окружностях по точке X и Y так, чтобы разность углов BAX и BAY, а также $AX \cdot AY$ были данной величины.

Реш. Начнем с того случая, когда разность равна нулю.

148. В окружности дана хорда AB. Провести в известном направлении хорду CD, встречающую AB в E так, чтобы отношение $AE : CD$ было данной величины.

149. Даны $\angle ABC$ и окружность O. В известном направлении провести секущую XY, определяющую в угле и окружности равные отрезки.

Реш. Пусть $BE \parallel XY$ и OD — расстояние O от BE. Перенесем параллельно окружность до совпадения отрезков. Новое положение центра можно определить. Если искомые отрезки должны быть в данном отношении, то надо увеличить или уменьшить угол B так, чтобы отрезок и хорды стали равны.

150. Даны три окружности, центры которых лежат на одной прямой. Провести секущую, которая дала бы в окружностях равные хорды.

151. Даны три равных угла, вершины которых на одной прямой (или три неравных угла, три стороны которых параллельны). Провести секущую, определяющую в углах равные отрезки.

152. Из данной точки провести прямую, дающую между данными тремя прямыми отрезки, находящиеся в данном отношении.

153. Даны два равных угла. Из данного центра описать окружность, определяющую в углах равные хорды.

154. Даны точки A, B и C. Через B провести прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний ее от A и C была равна k^2 (83, I).

155. Даны две окружности, на них по точке, A и B, и внешняя точка C. Найти на окружностях точки X и Y так, чтобы дуги AX и BY были подобны и чтобы $\angle CXY$ был данной величины.

На свойствах гармонических точек (г. м. XII) основано решение следующих задач.

156. Даны точки A и B. На прямой AB уложить отрезок ED данной длины так, чтобы точки A, E, B и D были гармоническими.

Реш. Проведем через A и B окружность, встречающую в C полуокружность, описанную на диаметре ED. Тогда CD и EC встретят первую окружность в серединах дуг F и H. Если теперь ED перенести параллельно в HG, то можно определить D, так как $\angle FDG$ прямой.

157. Даны три прямые и внешняя точка M. Провести секущую $MXYZ$ так, чтобы X и Y делили MZ гармонически.

Реш. Геометрическое место точки Z есть прямая, проходящая через пересечение двух первых прямых.

Построить треугольник, зная:

158. a, A и биссектор угла, смежного с A (156, IV).

159. A, b_B и расстояние C от b_B (157, IV).

160. a, b_B и $A - C$ (157, IV).

161. Даны две параллели, на них точки A и B и внешняя точка C. Провести секущую CXY так, чтобы $\angle AXB = 2 \angle AYB$ (452, II и г. м. XII).

162. Даны четыре прямых, выходящих из точки X. Начертить параллелограм с данным углом так, чтобы его вершины были на данных прямых, и чтобы сумма расстояний его вершин от X была равна данной длине.

Реш. Задача представляется необычно трудной, однако легко приводится к 497, II (черт. 74).

163. Даны две параллели, точка A — на одной из них, точка B — вне их. Провести секущую BXY так, чтобы $AX : AY$ было данное (точки A и X — на одной параллели).

164. Для двух данных окружностей выбрать центр инверсии так, чтобы они превратились в концентрические.

Реш. R и R_1 — радиусы данных окружностей, d — расстояние их центров, x и y — углы, образованные с линией центров касательными из искомой точки. Тогда $R_1 \sin x - R \sin y = d \sin x \times \sin y$ и $\cos^2 x \cdot R \sin y = R_1 \sin x \cdot \cos^2 y$. Второе уравнение, после преобразования сокращается на $\sin x \cos y$ и получается квадратное уравнение, которое для непересекающихся окружностей всегда имеет решение.

165. Даны две окружности и прямая. Провести окружность, пересекающую их под данными углами (164, IV и 450, II).

166. Провести окружность, пересекающую три данные окружности под данными углами (164, IV, г. м. XIV).

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

Окружность называется данной, если даны положение ее центра и точка, через которую она проходит (или радиус, равный данной длине). Прямая считается данной, если известны две точки, через которые она проходит. Эта прямая предполагается на этот раз незаполненной точками, как это бывает при решении задач линейкой. Ниже на некоторых рисунках помещены пунктирные прямые. Это *воображаемые* прямые, а не действительно начерченные.

Какими бы инструментами мы ни делали построение, всякая квадратная задача приведется к следующим четырем основным операциям:

1) на данной прямой указать одну или несколько точек;

2) построить точку встречи данных прямой и окружности;

3) построить точку встречи двух данных прямых, и

4)* построить точку пересечения двух данных окружностей.

Если мы желаем доказать, что всякая квадратная задача может быть решена одним циркулем, без помощи других инструментов, то достаточно выяснить, что первые три операции могут быть выполнены одним циркулем, потому что четвертая — выполняется циркулем непосредственно.

Можно составить сколько угодно систем решающих наш вопрос, но Адлеру пришла счастливая мысль применить к этому вопросу принципы инверсии. Можно осуществить его мысль так, чтобы по пути хоть немного ознакомить с некоторыми, весьма изящными построениями Маскерони [1]).

I. *Первая основная задача.* На данной прямой AB указать одну или несколько точек (решение Маскерони).

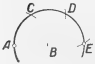
Строим (черт. 106) окружности (B, AB), (A, AB), (C, AB) и (D, AB); получаем точку E, лежащую на продолжении AB. Тут же видно, как отрезок AB можно умножить на произвольное целое число.

Если нам нужна точка, лежащая на отрезке AB, то (черт. 107) откладываем $AC = AB \cdot n$, где n есть целое, и чертим окружности

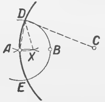
[1]) Mascheroni, La geometria del compasso, Павия, 1797 г. Переведено только на французский и немецкий языки.

(C, A), (A, B), (D, A) и (E, A); последние две определят искомую точку X. В самом деле, из подобия $\triangle\triangle\ ADC$ и ADX находим $AX:AD = AD:AC$, откуда $AX = (AB:n)$. Тут же видно, как одним циркулем разделить данный отрезок на целое число равных частей.

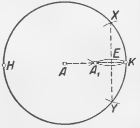
II. *Зная начало K и степень инверсии k^2, определить точку, соответственную данной точке A* (черт. 108).



Черт. 106.



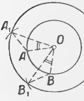
Черт. 107.



Черт. 108.

Начертим окружности (A, K) и (K, k) до встречи их в X и Y; строим окружности (X, K) и (Y, K) — пересечение их есть искомая точка A_1.

В этом случае говорят, что точка A инвертирована относительно (около) окружности (K, k), которая называется основной. Для доказательства вообразим диаметр KH окружности (A, X); тогда $KX^2 = k^2 = KE \cdot KH = KA_1 \cdot KA$. Если $KA < (KX:2)$, то это построение невыполнимо. Тогда отрезок KA умножают на целое число n (I)[1]) так, чтобы $KA \cdot n > KX$. Пусть $KB = AK \cdot n$. Находим точку B_1, обратную B, и умножаем KB_1 на n. Точка B_1 перейдет в искомую точку C, потому что $KB \cdot KB_1 = k^2$ или $(KB:n) \cdot (KB_1 \cdot n) = KA \cdot KC = k^2$.



Черт. 109.

III. *Зная начало K и степень инверсии k^2, начертить окружность, обратную данной прямой XY* (черт. 108). Искомая окружность проходит через K (теор. B)[2]). Пусть A_1 есть отражение K в XY (оно определяется двумя окружностями радиусов KX и KY). Определяем точку A, обратную A_1 (II); окружность (A, K) будет искомая. Это очевидно из равенств $k^2 = KA_1 \cdot KA = HK \cdot EK$.

IV. *К трем данным отрезкам a, b и c построить четвертый, им пропорциональный* (решение Маскерони). Опишем две концентрические окружности (O, a) и (O, b); отложим (черт. 109) хорду $AB = c$ и $AA_1 = BB_1$. Тогда $A_1B_1 : AB = OA_1 : OA$ или $A_1B_1 : c = b : a$, и A_1B_1 есть искомый отрезок.

---

[1]) Ссылка на задачу I пятого отдела.

[2]) Эта и подобные ей ссылки указывают на применение теорем A, B, $C, \ldots$, стр. 99—101.

Если $c > 2a$, то берут $AB = (c:n)$, где n есть целое произвольное число. Тогда на чертеже получится n-ая часть искомого отрезка (I).

V. *Зная начало K и степень инверсии k^2, инвертировать данную окружность.*

Пусть KY и KY_1 будут касательными к данной и искомой окружностям O и O_1 (черт. 50, стр. 62). Положение точки Y легко определить, разделяя KO пополам (I). Зная Y, легко определить Y_1 (II). Затем длины KO_1 и Y_1O_1 определяются из пропорций $KO_1 : KO = KY_1 : KY$ и $Y_1O_1 : YO = KY_1 : KY$ (IV). Остается провести окружности (K, KO_1) и (Y_1, Y_1O_1). Если данная окружность проходит через K, то искомая кривая обращается в прямую, две точки которой легко определить (II).

VI. *Вторая и третья основная задача.* Определить точку пересечения двух данных прямых или точку пересечения данных прямой и окружности с помощью одного циркуля.

Данные две кривые инвертируем около начала, взятого вне их (III и V). Тогда они отобразятся в известных окружностях; точка пересечения их Y найдется непосредственно. Затем точку Y инвертируем обратно (II) и получаем требуемое.

Мы видим, что все четыре основные операции, которые решают всякую квадратную задачу, могут быть выполнены одним циркулем, без всяких других инструментов, и потому *всякая квадратная задача может быть решена одним циркулем.* Отсюда уже легко вывести обратное предложение.

Пусть некоторая задача решается исключительно проведением одних окружностей, которые все вместе составляют некоторый геометрический образ M. Тогда отображенный образ M_1 будет состоять из окружностей и прямых, которые можно построить циркулем и линейкой, потому что отображать можно циркулем и линейкой. Но если это так, то и образ M может быть построен циркулем и линейкой, а это бывает только тогда, когда данная задача есть квадратная. *Общий способ решать квадратные задачи одним циркулем* состоит в следующем.

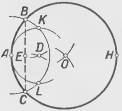
Пусть данная задача приводится к построению некоторой точки X. Представим себе, что задача решена циркулем и линейкой. Тогда получится некоторый геометрический образ, состоящий из ряда прямых и окружностей (в сложных случаях этот образ достаточно начертить рукой). В этом ряде найдутся две прямые (или прямая и окружность, или две окружности), пересечение которых определяет точку X. Рассмотрим первый случай; остальные два случая разрешаются так же и даже проще.

На этих двух прямых надо отыскать по две точки, A и B — на одной, C и D — на другой, так, чтобы все четыре точки могли быть построены одним циркулем. На практике эти четыре точки обыкновенно обнаруживаются без всякого труда. Теоретически существование этих точек обеспечивается тем, что, исходя из начала решения, мы каждую отдельную основную операцию построения

можем выполнить одним циркулем. Пусть же точки A, B, C и D найдены одним циркулем.

Тогда инвертируем одним циркулем прямые AB и CD; они отобразятся в окружностях. Эти окружности пересекутся в X_1. Наконец, инвертируем одним циркулем точку X_1 обратно и получаем точку X. Сказанное уже легко распространить на тот случай, когда задача приводится к построению нескольких точек. Возникающий при этом длинный ряд построений, как показано ниже, на практике можно сильно сократить, применяя принципы инверсии (задача VIII).

Мы видели, как тесно связан с принципами инверсии вопрос о решении задач одним циркулем. Сама собой напрашивается мысль, что среди многочисленных и изящных решений Маскерони должны быть такие построения, когорые вытекаюг из решения гех же задач методом инверсии. С другой стороны, хотя построения Маскерони в общем не зависяг[1]) от указанного общего метода решения задач одним циркулем, но в частных случаях они могуг приближаться и даже совпадать с решениями по общему методу. Чрезвычайно интересно указать, что то и другое, действигельно, так и есть. Вот примеры.



Черт. 110.

VII. *Данный отрезок AB разделить на n равных частей* (n — целое, черт. 107).

Пусть $AX=(AB:n)$. Инвертируем X, взяв окружность $(A,\ B)$ за основную. Точка X переходит в точку C. По принципу инверсии $AX\cdot AC=AB^2$, откуда $AC=AB\cdot n$ и точку C можно найти одним циркулем (I). Остается точку C инвертировать обратно (II).

Это решение совпадает с построением Маскерони.

VIII. *Найти центр окружности с помощью одного циркуля.*

Взяв произвольно точки A и B (черт. 110), чертим окружность $(A,\ B)$ — получим точку C. Определяем циркулем точки M и N так, чтобы $AM=MB=NB=NA$, а также точки P и Q так, чтобы $AP=PC=CQ=QA$. Инвертируем M, N, P и Q, взяв окружность $(A,\ B)$ за основную. Прямые MN и PQ отобразятся в окружностях, пересекающихся в A и X. Точку X инвертируем обратно и получаем искомое.

Попробуем это общее решение упростить. Во-первых, вместо прямой MN выгоднее взять прямую AD, потому что легко определить отражение A в BC. Во-вторых, легко заметить, что $AE\cdot AH=AB^2$, а потому точки E и H суть точки соответственные при степени AB^2. Но так как $DA=2AE$ и $AO=(AH:2)$, то точки D и O суть тоже обратные, и вопрос приводится к задаче II. Поэтому приходим к следующему решению. Определив точки A, B, C и D, описываем окружность $(D,\ DA)$ — получаем точки K и L. Затем чертим окружности $(K,\ AB)$ и $(L,\ AB)$ до пересечения их в O.

[1]) Во времена Маскерони теории инверсии не было.

Построения Штейнера и построения с помощью двусторонней линейки, прямого или острого угла.

Теперь мы рассмотрим решение задач проведением только одних прямых линий, причем на чертеже *иногда* уже имеется начерченной какая-нибудь *одна* вспомогательная фигура. Из всех таких способов наиболее сильными являются решения с помощью:

Б. Двусторонней линейки (два параллельные отрезка, расстояние которых неизменно); другие инструменты при этом не допускаются.

Г. Прямого или острого угла, сделанного из дерева или метала — другие инструменты не допускаются.

Ж. Односторонней линейки, причем на чертеже уже имеется начерченной окружность с *известным* центром (вспомогательная окружность Штейнера) [1] — другие инструменты не допускаются.

Далее, всякая невспомогательная окружность считается данной, если известно положение ее центра и длина радиуса, заданная где-нибудь начерченным отрезком. Однако ни одна точка такой окружности не считается данной и, если мы желаем определить на этой окружности точку какого-нибудь свойства, то должны ограничиться проведением только прямых линий.

Мы знаем, что решение всякой квадратной задачи сводится к известным четырем основным построениям (стр. 137).

Из этих основных задач первая и третья решаются способами *Б*, *Г* и *Ж* непосредственно — одной линейкой. Наша цель показать, что две другие основные задачи решаются теми же тремя способами, которые, несмотря на видимую ограниченность своих средств, решают таким образом всякую квадратную задачу.

Возможны разнообразные системы изложения этого вопроса — ниже выбрана, повидимому, простейшая из них. Решим предварительно несколько задач проведением одних прямых линий (односторонней линейкой).

IX. *Даны два параллельных отрезка AB и CD. Разделить их пополам.*

Пересечение AD и BC соединим с E (черт. 111).

Если перемножить пропорции $AP:PB=CQ:DQ$ и $AP:PB=$ $=DQ:CQ$, то получим $AP=PB$, а затем и $CQ=DQ$.

X. *Зная середину отрезка AB, провести ему параллель из данной точки C* (черт. 111).

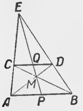
Берем на AC произвольно точку E, определяем пересечение PE с BC, и затем пересечение EB и AM.

---

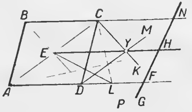
[1] Яков Штейнер „Geometrische Konstruktionen...“ Berlin, 1833, в русском переводе издано Харьковской математической библиотекой за № 1, Харьков, 1910. Я, впрочем, не следовал буквально ни Штейнеру, ни Адлеру, подробно изложившему этот вопрос. Пропущены следующие простейшие приборы и способы построения: 1) с помощью односторонней линейки и подвижного отрезка постоянной длины, 2) с помощью биссектора — вообще приборы Фельдблюма, 3) с помощью односторонней линейки, если на рисунке уже имеется начерченным ромб или квадрат, 4) с помощью одного или двух циркулей с постоянным раствором.

XI. *На рисунке дан параллелограм ABCD. Провести через его центр параллель одной из сторон.*

На AD берем произвольно L (черт. 112), проводим $DM \parallel AC$ и $CK \parallel BD$ (задача X); получается точка Y и прямая EY — искомая.



Черт. 111.

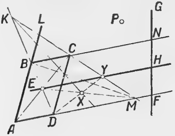


Черт. 112.

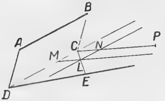
XII. *На рисунке дан параллелограм ABCD. Через данную точку P провести параллель данной прямой G.*

Продолжения AD, EY и BC (черт. 113) определят на G точки F, H и N так, что $FH = HN$, и задача приведена к задаче X.

Способами *Б*, *Г* и *Ж* легко построить вспомогательный параллелограм[1]); поэтому задачи XI и XII решаются этими способами, каждая — каждым способом в отдельности.



Черт. 113.



Черт. 114.

XIII. *На данной прямой DE от данной точки D отложить отрезок, равный данному отрезку AB.*

Б. Строим параллелограм $ABCD$; проводим $CP \parallel DE$ (XII, черт. 114) и строим ромб $MCNL$, прикладывая линейку один раз — к CD, а другой раз — к CP. Прямая CL определит искомую точку E.

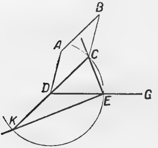
Можно бы показать, что построение ромба $MCNL$ легко выполняется приемами *Г* и *Ж*, но лучше разобрать решение нашей задачи каждым способом отдельно, потому что эти решения чрезвычайно изящны и характерны.

[1]) Это совершенно очевидно для способов *Б* и *Г*. В способе *Ж* всякий диаметр окружности дает отрезок и его середину — останется применить задачу X и повторить это построение. Еще проще начертить в данной окружности прямоугольник.

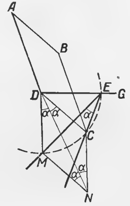
Г. Если данный угол — прямой, то строят два параллелограма $ABDC$ и $ABDK$ (черт. 115); затем двигают прямой угол вершиной по прямой G до тех пор, пока его стороны не будут проходить через K и C.

Если же имеем в руках острый угол α, то (черт. 116) строим параллелограм $ABCD$ и ромб $DCNM$.

Двигаем затем наш угол вершиной по прямой G до тех пор, пока его стороны не пройдут через M и C (или обратно). Очевидно, получается окружность (D, DC), и, след., $DE = DC$.



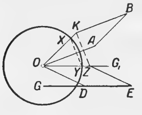
Черт. 115.



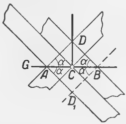
Черт. 116.

Ж. Проводим $G_1 \parallel G$, строим (черт. 117) параллелограм $ABKO$ и $KZ \parallel XY$; наконец, строим параллелограм $ZODE$.

XIV. *Через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой.*



Черт. 117.



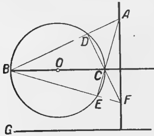
Черт. 118.

Из двух случаев, на которые распадается задача, один сводится на другой проведением параллелей (задача XII), и потому достаточно рассмотреть один какой-нибудь случай.

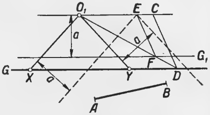
Б. Приставляют линейку к данной точке C два раза и проводят по обоим бокам линейки параллели; получают (черт. 118) точки A и B. Затем переворачивают линейку так, чтобы A и C были на ее бортах и опять проводят две параллели. CD — искомая.

Г. Если D — данная точка, то прямым углом задача решается непосредственно, а острым углом, как показывает черт. 118.

Ж. Проводят диаметр BC, параллельный данной (черт. 119) прямой G. Данную точку A соединяют с B и C и чертят DC и BE; AF — искомая, потому что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Теперь мы можем перейти к решению задач, решающих наш вопрос.



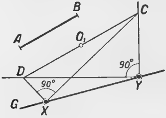
Черт. 119.



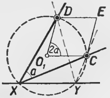
Черт. 120.

XV. *Вторая главная задача. Определить точку пересечения данной прямой G и окружности, заданной положением центра* O_1 *и длиной радиуса, равной данному отрезку AB.*

Б. Строим $O_1C \parallel G$ так, чтобы $O_1C = AB$ (задача XIII, черт. 120), и проводим $G_1 \parallel O_1C$ так, чтобы расстояние этих параллелей было равно ширине линейки a. Взяв произвольную секущую O_1FD, про-



Черт. 121.



Черт. 122.

водим $FE \parallel CD$. Если теперь поместить линейку так, чтобы края ее проходили через O_1 и E, то определятся искомые точки X и Y.

Заметим, что прямая G_1 может занимать положение более удаленное от O_1, чем прямая G.

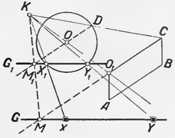
Г. Если данный угол — прямой, то строим $O_1C \parallel AB$ и $O_1D = CO_1 = AB$ (черт. 121). Затем, оставляя стороны прямого угла на точках D и C, передвигаем его до тех пор, пока вершина не придет на прямую G.

Если имеем острый угол a, то строим ромб DO_1CE (черт. 122) так, чтобы $O_1C = AB$ и $O_1C \parallel G$. Двигаем теперь вершину угла a по G до тех пор, пока его стороны не пройдут через D и C — получим требуемое.

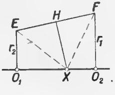
Ж. Построим (черт. 123) параллелограм O_1ABC и проведем из центра O вспомогательной окружности $OD \parallel O_1C$. Тогда K есть

центр подобия окружностей O и (O_1, C). Пусть CO_1 встречает G в M, а DO встречает KM в M_1; через M_1 проводим $G_1 \parallel G$. Прямые KX_1 и KY_1 определят на G искомые точки X и Y.

XVI. *Четвертая главная задача. Определить точку пересечения двух окружностей, заданных положением центров O_1 и O_2 и длиною радиусов, равных данным отрезкам $r_1 = AB$ и $r_2 = CD$.*



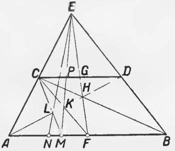
Черт. 123.



Черт. 124.

Чтобы решить эту задачу, построим радикальную ось заданных окружностей, — тогда задача приведется к предыдущей. С этой целью надо определить на прямой O_2O_1 точку X так, чтобы $O_1X^2 - O_2X^2 = r_1^2 - r_2^2$.

На перпендикулярах к O_2O_1 (задачи XIV и XIII) откладываем (черт. 124) $O_1E = r_2$ и $O_2F = r_1$; из середины EF восставим $HX \perp EF$[1]). Тогда $EX = FX$ и потому $O_1X^2 + r_2^2 = O_2X^2 + r_1^2$ или $O_1X^2 - O_2X^2 = r_1^2 - r_2^2$, и вопрос приведен к задаче XV.



Черт. 125.

Итак, мы убедились, что следующие очень простые инструменты: линейка с параллельными краями, прямой или острый угол[2]) из какого-нибудь материала, наконец, односторонняя линейка с вспомогательной окружностью Штейнера позволяют решить всякую квадратную задачу на построение. Однако было бы большим заблуждением, если бы к решению каждой задачи означенными инструментами мы стали бы подходить следующим образом: вообразили бы задачу решенной циркулем и линейкой и каждый шаг построения стали бы выполнять согласно указанным задачам IX—XVI. Напротив того, каждый из этих способов имеет свои характерные особенности, и в каждом частном случае, при тщательном

---

[1]) Разделить отрезок пополам очень легко с помощью задач IX и XII, начертив вспомогательный параллелограм.

[2]) Сторона, лежащая против прямого или острого угла, не имеет значения и может быть кривой или зазубренной.

рассмотрении задачи, каждый инструмент может дать решение, иной раз более простое, чем циркуль и линейка. Отчасти мы уже это видели в задачах XIII и XIV. Вот еще пример этого характера.

XVII. *Дан отрезок AB. С помощью односторонней линейки построить третью, четвертую, пятую и т. д. часть этого отрезка, если на чертеже уже имеется отрезок CD, параллельный AB.*

Брианшон дает этой задаче чрезвычайно изящное решение (черт. 125). F есть середина AB (задача IX). Легко доказать, что $AM=\frac{1}{3}AB$, $AN=\frac{1}{4}AB$ и т. д.

Имеем

$$\frac{CP}{MF}=\frac{CK}{KF}=\frac{CD}{AF},$$

или

$$\frac{CP}{AF-AM}=\frac{CD}{AF},$$

а также

$$\frac{CP}{AM}=\frac{CD}{AB},$$

отсюда

$$\frac{CP}{AF-AM}=\frac{2CP}{AM}$$

и

$$AM=\frac{2}{3}AF=\frac{1}{3}AB.$$

Дальше для доказательства всего легче выбрать метод от n к $n+1$.

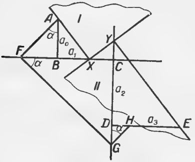
Теперь мы покажем, что из всех инструментов, о которых мы говорили, считая циркуль и линейку, наибольшую мощь имеет прямой угол.

Построение корней уравнения третьей и четвертой степени.

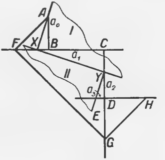
Мы видели (стр. 119), что уравнение четвертой степени приводится к кубичному уравнению, которое называется резольвентой данного уравнения.

При этом, если резольвента разрешается в квадратных радикалах, то в них же разрешается и данное уравнение. С другой стороны, если сумеем построить корни резольвенты, то уже легко построить корни и данного уравнения выше рассмотренными инструментами, а также циркулем и линейкой. Оказывается, что с помощью двух прямых углов можно построить действительный корень всякого кубичного уравнения. Раз найден один корень, то легко уже найти другие корни, а след., есть возможность построить корни и уравнения 4-й степени, если они действительны.

Для построения корней уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ поступают следующим образом (черт. 126 и 127). Строят прямоугольную ломаную $ABCDE$, отрезки которой последовательно равны: a_0, a_1, a_2, a_3, сообразуясь со знаками этих коэффициентов следующим образом: если параллельные отрезки имеют разные знаки, то их откладывают в одну сторону (на черт. 126 отрезки a_0 и a_2, a_1 и a_3 — разных знаков); если же параллельные отрезки имеют одинаковый знак, то их откладывают в противоположном направлении (на черт. 127 отрезки a_0 и a_2 — разных знаков, a_1 и a_3 имеют один и тот же знак).



Черт. 126.



Черт. 127.

Построим при A угол α и проведем прямоугольную ломаную $AFGH$; пусть $\operatorname{tg}\alpha = x$. Тогда

$$FC = a_0x + a_1$$
$$CG = (a_0x + a_1)\,x$$
$$DG = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$EH = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Если угол α подобран так, что EH обратится в нуль, то $x = \operatorname{tg}\alpha$ будет корнем нашего уравнения. Но чтобы EH обратилось в нуль, необходимо, чтобы последний отрезок ломаной $AFGH$ прошел через точку E. Такую *разрешающую* ломаную легко построить, имея два прямых угла из твердого материала. В самом деле, будем передвигать прямые углы I и II так, чтобы они соприкасались катетами, и чтобы вершина первого угла двигалась по прямой BC, вершина второго — по прямой CD. Тогда довольно легко найти такое положение углов, при котором другие, не соприкасающиеся, их стороны пройдут, одна — через A, другая через E[1]). Таким образом получится разрешающая ломаная $AXYE$ на обоих чертежах.

[1]) Кстати сказать, что есть единственная возможность сделать правильный чертеж, если уже начерчена ломаная $ABCDE$.

Начертив разрешающую ломаную, мы получим $x = \operatorname{tg} \alpha$ по абсолютному значению; далее в каждом частном случае необходимо убедиться, с каким знаком надо взять $\operatorname{tg} \alpha$.

Теперь мы можем указать целый ряд известных с древности задач, которые, будучи неразрешимы циркулем и линейкой, легко решаются другими средствами.

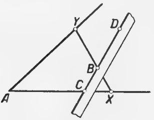
Делийская задача (76, III) приводит к уравнению $x^3 = 2$ или $x = \sqrt[3]{2}$, корни которого легко, как мы видели, построить, имея два прямых угла.

Задача Паппа (83, III) приводит к пересечению конхоиды (кривая 4-го порядка) с прямой, а потому придется строить корни уравнения 4-й степени, что опять возможно выполнить, имея в распоряжении два прямых угла.

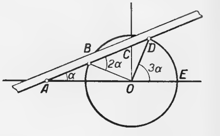
Трисекция угла (93, III) приводит к уравнению третьей степени, и построение можно выполнить двумя прямыми углами.

Последние две задачи можно еще решить с помощью двусторонней линейки (бумажной полоски с параллельными краями), если отложить на ней отрезок данной длины [1]); для трисекции угла нужно еще провести одну окружность. Вот эти вполне точные решения.

Пусть (черт. 128) на борту бумажной полоски отложен отрезок CD данной линии, A — данный угол и B — данная точка. Передвигаем полоску так, чтобы точка C оставалась на стороне AC и точка B оставалась на борту бумажки. Тогда легко найти такое положение бумажки, при котором C и D придут в X и Y.



Черт. 128.



Черт. 129.

Пусть далее имеем угол DOE (черт. 129) и окружность (O, OD). Если $AB = BC = OB = OD$ и $\angle BAO = \alpha$, то, очевидно, $\angle DOE = 3\alpha$. На основании этого отложим на борту бумажки отрезок AB, равный радиусу, и будем ее двигать так, чтобы точка A оставалась на прямой OE, а край бумажки проходил через D. Тогда точка B опишет конхоиду,

[1]) Это легко сделать без циркуля приемами *Б* и *Г*, если сумеем отложить отрезок данной длины где-нибудь на бумажной полоске. Наконец, для этого можно употребить циркуль, построить на бумажной полоске параллелограм и продолжить его стороны.

и не трудно определить искомое положение точек A и B. Останется нанести $\angle BAO$ на данный угол.

Так как $\angle OCB = 90° - \alpha$, то $OC \perp AO$; следовательно, построение можно сделать иначе. Проведем $OC \perp AO$, отложим на борту бумажки $AC = 2OD$ и будем ее передвигать так, чтобы точки A и C оставались на сторонах прямого угла O. Наконец бумажка примет такое положение, при котором точка D придет на борт бумажки, и положение точки A будет искомое.

Построение правильных семиугольника и девятиугольника приводит к кубичным уравнениям; построение корней этих уравнений недоступно для циркуля и линейки [1]), но легко выполняется двумя прямыми углами.

Заметим, что построение правильного девятиугольника требует угла в 20°. Но так как это есть третья часть угла в 60°, то вопрос приводится к трисекции угла и потому решается двусторонней линейкой.

В заключение считаем не лишним сказать следующее. Мы не касались построений с помощью конических сечений и инструментов, которые чертят трансцендентные кривые и решают задачи вроде квадратуры круга. Затем, поставив себе главной целью доказать, что способы *Б*, *Г* и *Ж* решают всякую квадратную задачу, мы не обращали особого внимания на две очень важные вещи: экономичность построения и точность его результатов. Методы к определению того и другого мы уже имеем, а равно и методы определения того, решается ли данная задача каким-нибудь инструментом. Весьма вероятно, что в недалеком будущем мы будем решать каждую задачу, даже и в средней школе, теми инструментами, которыми это *следует* делать.

Что же касается изложенного, то здесь мы очень и очень приблизились к точному пониманию слов Enriques'а „каждая геометрическая задача может быть решена построением, но не всякими инструментами, так что существуют только *относительно неразрешимые* задачи на построение".

---

[1]) Эти уравнения суть $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ и $y^3 - 3y + 1 = 0$.

ПРИБАВЛЕНИЕ.

ЗАДАЧИ С НЕПРИСТУПНЫМИ ТОЧКАМИ.

Чтобы приблизить наши построения к практике, мы будем их рассматривать происходящими на плане данной местности или какого-нибудь другого места действия. Затем мы будем рассматривать только тот случай, в котором неприступная точка, будучи таковой в действительности, находится вне плана. Так надо потому, что раз неприступная точка попала на план, то можно решить задачу на плане — перенести же полученное решение на местность и вообще в действительность есть дело техники.

Неприступная точка в задачах, конечно не есть абсолютно неприступная точка; она должна быть так или иначе связана с данными вопроса. Так как речь пойдет только о квадратных задачах, то неприступная точка может быть задана лишь тремя способами:

1) она есть пересечение двух данных прямых (напр., двух провешенных прямых), которые не могут быть продолжены на плане до пересечения;

2) она есть пересечение двух данных окружностей, продолжать которые до пересечения нет возможности;

3) она есть пересечение данных прямой и окружности, продолжать которые до встречи невозможно.

Прежде всего мы покажем, что для задач на построение все три способа задания неприступной точки безразличны, т. е. каждый способ может быть сведен на два другие способа. Для этого сначала решим две задачи, которые составляют фундамент всего этого учения.

I. *Через данную точку M провести прямую, которая проходила бы через неприступную точку встречи отрезков AB и CD.*

Реш. (черт. 130). Проведем две параллели[1]), одну через M, встречающую AB и CD в E и G, и другую, пересекающую AB и CD в X и Y. На отрезке XY найдем точку N так, чтобы $XN:YN = EM:MG$. Прямая MN есть искомая.

Так как отрезок MN известен, то из пропорции $\frac{MN+NK}{NK} = \frac{EM}{XN}$ легко построить NK, а затем и MK, т. е. расстояние данной точки от неприступной точки K.

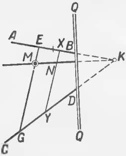
[1]) Каждый чертеж перерезан прямой QQ, которая представляет борт плана.

II. *В известном направлении провести прямую, проходящую через неприступную точку E пересечения отрезков AB и CD* (черт. 131).

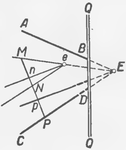
Реш. Из произвольной точки e плана проводим прямые eE (I), $eN \parallel CD$ и en, параллельную данному направлению. Произвольная прямая встретит проведенные прямые и отрезок CD в точках M, n, N и P. Отрезок Mn умножим относительно M на отношение $MP : MN$; тогда точка n перейдет в p, и остается провести pE (I). Существуют и другие решения.

В частном случае эта задача позволяет провести и измерить расстояние неприступной точки от данной прямой.

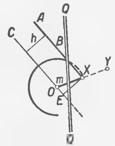
Пусть неприступная точка X есть точка пересечения двух окружностей O и O_1, которые пересекаются вне плана. В $\triangle OXO_1$ известны три стороны и, след., построив подобный ему треугольник, легко



Черт. 130.



Черт. 131.



Черт. 132.

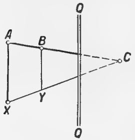
определить его углы. Остается из O и O_1 провести две прямые под известными углами к OO_1. Эти две прямые заменят данные окружности.

Пусть неприступная точка X есть пересечение (черт. 132) окружности O и прямой AB, причем их нельзя продолжать до встречи. Проведем $OC \parallel AB$ и найдем расстояние прямых OC и AB, равное h. Легко построить $\triangle oxe$, в котором $e = 90^\circ$, $ox = OX$ и $xe = h$. Остается построить $\angle YOE = \angle xoe$; тогда данная окружность заменится прямой OY.

Из сказанного следует, во-первых, что всякая квадратная задача может быть сведена к ряду построений двух отрезков, а во-вторых, является возможность установить следующие определения. Данной неприступной точкой называется точка, определяемая пересечением двух данных отрезков, продолжать которые до пересечения невозможно. Наоборот, чтобы определить неизвестную неприступную точку, надо получить или провести два отрезка, на пересечении которых она находится. Отсюда уже ясно, что́ называется неприступной прямой и неприступным углом, и как их отыскивать.

Если мы припомним, что ответ на вопрос вообще не может быть более точен, чем данные вопроса, то нам будет понятен тот свое-

образный характер, который имеют решения задач с неприступными точками. Бывает, что искомая точка получится на чертеже — тогда решение будет идеальное, которое немедленно можно получить в действительности. Но бывает, что искомая точка получится неприступной, определяемой двумя проведенными на чертеже отрезками, продолжать которые до пересечения нельзя. Мы должны признать такое решение совершенным, хотя иногда окончить его практически невозможно. Сущность дальнейшего исчерпывается следующими задачами, — последняя общего характера.



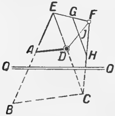
Черт. 133.

III. *На прямой даны точки A, B и C, из которых последняя неприступна. Определить AC : BC* (черт. 133).

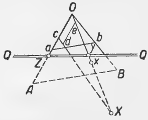
Реш. Из произвольной точки X плана проводим XC (I) и $BY \parallel AX$ до пересечения с CX в Y. Искомое отношение есть $AX : BY$.

IV. *Из данной точки A провести прямую, параллельную неприступной прямой BC* (черт. 134).

Реш. Проводим AB (I), продолжим BA до E, проводим EC (I); берем произвольно точку F и проводим FC (I). Определяем $EA : EB$ (III); проводим произвольно $GH \parallel EC$ и делим HG в точке J так, чтобы



Черт. 134.



Черт. 135.

$$GH : GJ = EB : EA;$$

FJ встречает EC в искомой точке D.

Тут же видно, как делить в известном отношении отрезок EC, соединяющий доступную и неприступную точки.

V. *Искомая точка X связана с данными неприступными точками A и B конечным рядом известных построений*[1]*). Построить точку X* (черт. 135).

Реш. Взяв центр подобия O, проводим OA и OB (I); затем прямую AB умножаем на число, меньшее $Oz : OA$ (III). Короче, берем произвольно на плане точку a и проводим $ab \parallel AB$ (IV); $\triangle AOB$

[1]) Напр., точка X должна быть в известных расстояниях от A и B, или делить AB в известном отношении, или $\triangle AXB$ должен иметь известную форму, или площадь и т. д.

перейдет в aOb, сжавшись, но сохранив свою форму. Определяем точку x, соответственную точке X. Для этого придется сделать ряд построений, определяющих точку X в зависимости от A и B. Каждое отдельное из этих построений, по предыдущему, можно рассматривать, как нахождение пересечения двух известных отрезков, повторенное один или несколько раз. Тогда могут представиться следующие случаи:

1) Каждое отдельное построение пары прямых дает точку на плане, кроме последнего, определяющего точку x вне плана. Тогда проводим Ox (I). Берем произвольно Oc, проводим из произвольной точки e прямой Ox отрезок de так, чтобы $de:Oc = aO:AO$. Точка X определяется прямыми Ox и cd.

Иногда бывает выгодно точку x перенести на план. Для этого определяем отношение $Oy:Ox$ (III) и умножаем $\triangle aOb$ на число, меньшее $Oy:Ox$. Тогда точка x перейдет в x_1 на план.

2) Каждое отдельное построение пары отрезков дает неприступную точку, хотя пара этих отрезков лежиг на плане. Тогда эту неприступную точку надо перевести на план совершенно так же, как это только что было сделано с точкой x. При этом $\triangle aOb$ придется умножать на правильную *конечную* дробь *конечное* число раз и, след., он уменьшится, но не может дойти до нуля. Поэтому, построение вообще даст результат наверное.

3) Каждое отдельное построение пары отрезков может дать одну или две неприступных прямых. Пусть, напр., для какой-нибудь прямой получилась неприступная прямая MN, определяемая двумя неприступными точками M и N. Пусть OM и ON (I) встречает борта плана в m и n. Определяем $OM:Om$ и $ON:On$ (III); пусть первое отношение есть большее. Тогда $\triangle aOb$ надо умножить относительно O на число, меньшее $Om:OM$; точки M и N перейдут на план. Такого рода построения придется делать конечное число раз; $\triangle aOb$ испытывает конечное число умножений на правильную конечную дробь и таким образом даст решение.

4) Самая неблагоприятная комбинация произойдет тогда, когда предыдущие два случая соединятся вместе, но, очевидно, результат будет тот же.

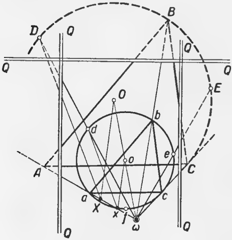
5) Точки x и X получатся на плане — тогда будет идеальное решение.

Задачу легко распространить с двух неприступных точек на всякое конечное число точек.

Из сказанного вытекает следующий общий способ решения задач с неприступными точками. Надо перевести искомую фигуру на план, выбрав на нем центр подобия; все данные точки на плане при этом переместятся известным образом, но не могут сойти с плана, потому что они приблизятся к центру подобия. Затем надо решить задачу в ее новом малом масштабе; тогда получится ряд более или менее веских указаний для практического решения задачи. Эти указания могут иметь различную силу, иногда решающую все дело; иногда же практическое решение не может быть достигнуто. Приводим пример.

VI. *Провести окружность через неприступные точки A, B и C и определить положение середин дуг AB, BC и AC этой окружности* (черт. 136).

Реш. Взяв центр подобия ω, △ ABC преобразовываем в △ abc, как в задаче V, и пусть o будет центр описанного около него круга, точки же d, e и f суть середины дуг ab, bc, ac этой окружности. Точки o, d, e и f мы можем считать находящимися на плане, потому что, если бы этого не было, то последовательным умножением △ abc мы перевели бы эти точки на план (задача V). Умножим теперь точку o на известное нам отношение $A\omega : a\omega$ (III); она перейдет в искомую точку O. После этого может быть два случая.



Черт. 136.

1) Точка O окажется на плане. Тогда для определения, напр., точки D имеем две прямые ωd и OD, перпендикулярную к ab. Так как радиус $AO = ao.\frac{A\omega}{a\omega}$, то в некоторых случаях мы можем описать окружность O на самом деле; точки D, E и F при этом могут оказаться тоже на плане и решение будет идеальное. Вообще же △ DEF будет для нас недоступным, хотя все его части нам известны (углы, стороны, все линейные элементы, потому что они больше соответственных элементов △ def в $(A\omega : a\omega)$ раз, площадь этого треугольника и т. д.) — на практике это может оказаться совершенно достаточным для идеального решения задачи.

2) Точка O находится вне плана. Тогда на $a\omega$ отложим части ωx и ωX так, чтобы $\omega X : \omega x = A\omega : a\omega$. Проведем из X параллели ox и dx. Первая параллель и прямая ωo определят O; вторая параллель и прямая ωd определят точку D. Так же определяются E и F. В △ DEF нам известно решительно все, что только можно потребовать по величине, и в этом смысле он может часто удовлетворить требованиям практики; при некоторых условиях мы даже можем его построить отдельно, но построить его в действительном, фактическом его положении можно только в исключительных случаях.

Было бы слишком долго классифицировать задачи с неприступными точками. Достаточно указать, что стоит только взять обыкновенную задачу на построение и заменить в ней одну или несколько данных точек неприступными точками. Поступая так, напр., с задачей „провести окружность через три точки" можно получить три

задачи: „провести окружность через три точки, из которых одна (две или все) недоступна". Из этого следует, что число задач с неприступными точками значительно превышает число обыкновенных задач на построение.

Нам остается указать, что задачи с неприступными точками могут быть решаемы с помощью методов вращения около оси, вращения около точки и параллельного перенесения, так как, очевидно, этими способами можно неприступную точку перенести на план. Если же при этом некоторые данные точки сойдут с плана, то надо применить умножение фигур.

В отдельных же случаях эти методы могут давать результаты очень быстро, поэтому ими никак нельзя пренебрегать.

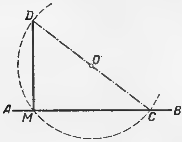
Н. В. Наумович.

УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ.

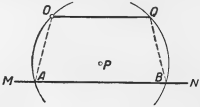
ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

7*. Для этой задачи можно указать еще следующее простое построение.

Из произвольной точки O плоскости радиусом OM опишем окружность, пересекающую AB во второй точке C (черт. 137). Если D — вторая точка пересечения прямой CO и описанной окружности, то DM — искомый перпендикуляр.



Черт. 137.



Черт. 138.

Применяя терминологию Лемуана (см. Адлер, Теория геометрических построений, Ленинград 1940, гл. X), это решение можно назвать геометрографическим, т. е. самым простым, так как ему соответствует наименьшее число $S = 8$. Для приводимых у И. И. Александрова двух решений этой задачи $S = 9$.

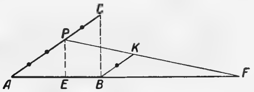
8*. Фразу „который вдвое больше какого-нибудь произвольного отрезка“ можно опустить, так как всякий отрезок вдвое больше своей половины, а любой отрезок можно разделить пополам (4, I).

Можно было бы сказать так. Через O проведем произвольную прямую, которая встретит AB в M. На отрезке OM опишем полуокружность; она встретит AB в точке, соединив которую с O, получим искомый перпендикуляр. Вместо построения полуокружности можно восставить к отрезку OM перпендикуляр в его середине (6, I), что было бы проще.

14*. Можно указать третье решение этой задачи. Из произвольной точки P плоскости радиусом OP (OP должно быть больше расстояния P до MN) опишем окружность, пересекающую MN в точках A и B (черт. 138). Затем из B радиусом AO описываем еще окружность, пересекающую первую в Q; $OQ \parallel MN$.

С точки зрения геометрографии это решение такое же простое, как и приводимое автором. Для него $S = 9$.

17*. Если имеется в виду внешнее деление отрезка, т. е. нужно найти такую точку F, чтобы было справедливо отношение $AF:BF = m:n$ (черт. 139), то поступаем следующим образом: через A и B проводим две произвольные параллельные прямые AC и BK, на которых откладываем отрезки $AP = m$ и $BK = n$, и соединяем P с K. Прямая PK пересекается с AB в искомой точке F. В самом деле, из подобия треугольников APF и BKF следует $\frac{AF}{BF} = \frac{AP}{BK} = \frac{m}{n}$.



Черт. 139.

Если четыре точки A, B, E и F так расположены на прямой, что справедливо отношение

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{BF},$$

то они называются гармоническими.

39*. *Решение.* Пусть в $\triangle ABC$ биссектриса угла A рассекает основание CB, но отрезки $CD = m$ и $DB = n$. На основании известной теоремы имеем:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CD} = \frac{n}{m}.$$

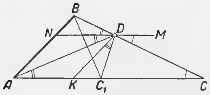
Далее,

$$\frac{AC + AB}{AC} = \frac{CD + DB}{CD} = \frac{m + n}{m},$$

откуда

$$AC = \frac{m}{m+n} \cdot (AC + AB) \text{ и } CD = \frac{m}{m+n} \cdot (CD + DB).$$

Но так как $AC + AB > CB$, то $AC > CD$.



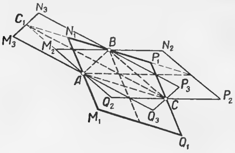
Черт. 140.

43*. *Решение.* Пусть $AC_1 = AB$ (черт. 140) и $NDM \parallel AC$. Соединим C_1 с D и B; тогда $C_1D = BD$ и $\angle BDA = \angle ADC_1$. Проведем $DK \parallel AB$, тогда фигура $ANDK$ — ромб, $\angle NDA = \angle ADK$ и, следовательно, $\angle KDC_1 = \angle BDN$. Но $\angle BDN = \angle C = \angle MDC$, следовательно, $\angle C_1DN - \angle CDM = \angle C_1DN - \angle C_1DK = \angle KDN = \angle A$.

65*. *Указание.* Угол между высотами можно определить из четырехугольника, образованного высотами и сторонами. Этот угол будет иметь постоянную величину.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

9*. *Решение.* Провести параллели одной из медиан треугольника, образованного данными точками. Три решения.



Черт. 141.

Что будет, если данные точки лежат на одной прямой?

10*. *Решение.* Общая касательная должна быть или параллельна AB, или проходить через середину отрезка AB.

12*. *Решение.* Соединяем данные точки A, B и C и проводим медианы полученного треугольника (черт. 141). Три решения.

14*. *Решение.* Искомые прямые параллельны прямой, соединяющей центр окружности с серединой отрезка, образуемого данными двумя точками.

19*. *Решение.* Если K — середина данной диагонали параллелограма, то OK будет перпендикулярна ко второй диагонали, т. к. концы ее должны лежать на данной окружности. Задача возможна, если K находится внутри данной окружности.

21*. *Решение.* Искомая секущая или параллельна линии центров, или проходит через середину отрезка, соединяющего центры данных окружностей.

Когда задача невозможна?

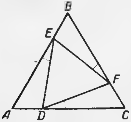
26*. *Решение.* Искомый радиус равен гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого суть отрезок OA и радиус данной окружности O.

29*. *Указание.* Рассмотреть подобные треугольники.

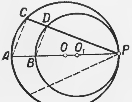
32*. *Решение.* Так как известно направление общей хорды искомой и данной окружностей, то это дает нам возможность найти их линию центров, которая перпендикулярна к общей хорде.

34*. Желательно исследовать случаи:

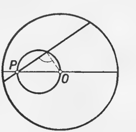
1) данная точка лежит между данными параллелями, 2) на одной из них, 3) по одну сторону от них.



Черт. 142.



Черт. 143.



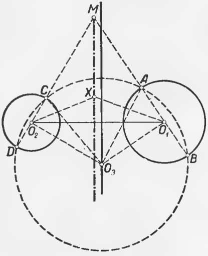
Черт. 144.

40*. *Решение.* Пусть ABC — данный равносторонний треугольник (черт. 142) и DEF — вписанный в него такой же треугольник. Из чертежа имеем: $\angle CDE = \angle DAE + \angle AED$ или $\angle CDF + 60° = 60° + \angle AED$, откуда следует, что $\angle CDF = \angle AED$. Также $\angle EFB = \angle CDF$ и $\angle CFD = \angle ADE = \angle BEF$. Следовательно, $\triangle ADE = \triangle EBF$ (по стороне и двум прилежащим углам) и $AD = BE = CF$, а также $AE = BF = CD$.

Таким образом, для нахождения двух других вершин искомого треугольника надо на сторонах AB и BC данного треугольника ABC отложить отрезки, равные AD.

VI*. Это геометрическое место можно рекомендовать дополнить следующим.

Геометрическое место точек, делящих в отношении $m:n$ хорды, проходящие через данную точку P окружности O, есть окружность O_1, касающаяся окружности O в точке P.



Черт. 145.

Действительно, проведем диаметр POA (черт. 143) и найдем точку B на нем так, что $AB:BP = m:n$ (17, I). Проведем, далее, произвольную хорду PC, на которой отыщем точку D, удовлетворяющую условию $CD:DP = m:n$. Тогда будем иметь: $AB:BP =$

$= CD : DP = m : n$, следовательно, $AC \parallel BD$ и $\angle BDP = 90°$. Таким образом, искомое геометрическое место — окружность, диаметр которой есть BP.

В частном случае геометрическое место средин хорд, проходящих через данную точку P окружности O, есть окружность, построенная на радиусе OP как на диаметре.

Если P находится внутри окружности O, то геометрическое место средин хорд, проходящих через нее, есть окружность, построенная на PO, как на диаметре (черт. 144).

***XIII*,* 3.** Построение см. на чертеже 145.

66*. Эта задача имеет 4, 3, 2, 1 и ни одного решения. Следует разобрать, когда это будет.

82*. *Решение.* Центр искомой окружности лежит на окружности концентрической с данными и радиус которой есть $\frac{r_1 + r_2}{2}$ или $\frac{r_1 - r_2}{2}$ $(r_1 > r_2)$. Если точка находится между данными окружностями, то имеем всегда четыре решения, если на одной из них, — два. Если точка находится внутри меньшей окружности или за большей, — решений нет.

86*. *Решение.* Искомые центры лежат на пересечении окружностей, проведенных из центра O_1 радиусом $R_1 \pm R$ и из центра O_2 радиусом $R_2 \pm R$, где R_1 и R_2 — радиусы данных окружностей O_1 и O_2. Выявить число решений и условия возможности решения.

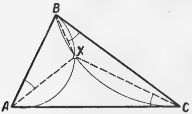
88*. Здесь следует тщательно исследовать различные возможные положения третьей окружности, которая может пересекать одну или обе данные окружности, а может и не иметь с ними общих точек, и указать случаи, когда решение становится невозможным.

96*. *Решение.* Сначала строим прямоугольный треугольник ABD по $AB = c$ и $BD = h_b$. Затем применяем г. м. *I* и 40, I.

111*. *Решение.* Если A и MN — данные центр и прямая, то искомая хорда проходит через точку пересечения перпендикуляра, опущенного из A на MN, и прямой, проходящей через середины отрезков, параллельных MN (г. м. *IV*).

116*. *Указание.* Опустить из центра окружности перпендикуляры на данные прямые и найти их отношение (г. м. *IV*, следствие 2).

120*. *Решение.* Пусть точка X найдена так, что $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$ (черт. 146). Рассмотрим $\triangle ABX$.



Черт. 146.

Имеем:

$$\angle XAB + \angle ABX = \angle XBC + \angle ABX = \angle B,$$

следовательно,

$$\angle AXB = 180° - (\angle XAB + \angle ABX) = 180° - \angle B.$$

Аналогично, рассматривая $\triangle BCX$, получим $\angle BXC = 180^\circ - \angle C$, а из $\triangle AXC$ выведем, что $\angle AXC = 180^\circ - \angle A$.

Теперь ясно, что точка X лежит на дуге, проходящей через точку A и B и вмещающей $\angle(180^\circ - B)$, а также на дуге, проходящей через B и C и вмещающей $\angle(180^\circ - C)$, и в то же время на дуге, проходящей через A и C и вмещающей $\angle(180^\circ - A)$. Вторая точка J находится аналогично. Построение дуг, вмещающих указанные углы, см. в задаче 57, II.

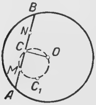
122*. *Указание.* Описать около $\triangle ABC$ окружность.

123*. *Указание.* На отрезке, определяемом данными двумя точками, построить как на диаметре окружность.

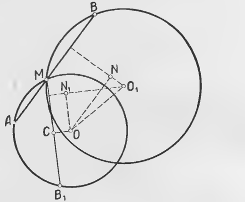
126*. *Указание.* Угол между касательными к двум окружностям в точке их пересечения равен углу между радиусами, проведенными в точку касания. Следовательно, известен угол, под которым виден отрезок, соединяющий данную точку с центром окружности (г. м. V). Всегда два решения.

129*. См. примечание к VI^*.

132*. *Решение.* Если AMB — искомая хорда (черт. 147), то $MB - MA = a$. Отложим $NB = MA$. Тогда $MB - MA = MB - NB = MN$. Проведем $OC \perp AB$, тогда $MC = \frac{a}{2}$. Остается описать на MO как на диаметре окружность и найти на ней хорды MC и MC_1, равные $\frac{a}{2}$. Условие возможности решения: $MO \geqslant \frac{a}{2}$. Как проходит искомая хорда, если $MO = \frac{a}{2}$?



Черт. 147.



Черт. 148.

136*. *Решение.* Искомая секущая параллельна катету прямоугольного треугольника, построенного по катету и гипотенузе, равной отрезку, соединяющему центры данных окружностей (черт. 148).

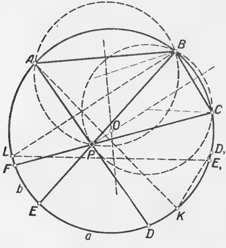
150*. *Решение.* Возможны два варианта: точка P находится или внутри, или вне окружности O.

1) Если P находится внутри окружности O, то $\angle APB$ измеряется полусуммой дуг AB и a, а $\angle BPC$ — полусуммой дуг BC и b.

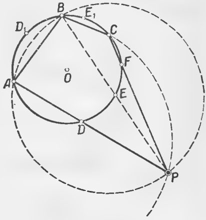
Таким образом, отложив от точки B дугу $BD_1 = a$ и построив

вписанный угол AKD_1, опирающийся на дугу ABD_1, получим $\angle AKD_1 = \angle APB$ (черт. 149). Точно так же, отложив дугу $CE_1 = b$ и построив вписанный угол BLE_1, опирающийся на дугу BCE_1, получим $\angle BLE_1 = \angle BPC$. Задача сводится к построению двух дуг, опирающихся на AB и BC и вмещающих углы AKD_1 и BLE_1.

2) Если точка P расположена вне окружности O (черт. 150), то $\angle APB$ измеряется полуразностью дуг AB и DE. Отложив $\smile BD_1 = a$, найдем $\angle D_1BA = \angle APB$. Точно так же, отложив $\smile CE_1 = \smile EF = b$, найдем $\angle E_1CB = \angle BPC$. Задача сводится к построению двух дуг, опирающихся на AB и BC и вмещающих углы D_1BA и E_1CB.

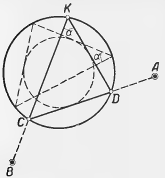


Черт. 149.



Черт. 150.

152*. *Решение.* Направление касательных, проведенных из точек A и B, определяется вторым катетом прямоугольного треугольника, построенного на гипотенузе AB и катете, равным диаметру окружности. Построение возможно при $AB \geqslant 2R$. Использовать г. м. *III*.



Черт. 151.

168*. *Решение.* Возможны два случая: 1) через данные точки A и B проходят стороны треугольника, заключающие данный угол α. 2) Через A и B проходят стороны, не заключающие данного угла α (черт. 151). В первом варианте задача сводится к построению на AB дуги, вме-

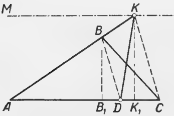
щающей $\angle \alpha$. Во втором случае надо описать окружность, концентрическую данной и касающуюся хорды a, соответствующей вписанному углу α; затем из A провести касательную ADC к ней, C соединить с B и полученную точку K соединить с D. $\triangle KDC$ — искомый.

179*. *Решение.* Данные углы определяют соответственные им хорды $AB = a$ и $A_1B_1 = b$. Продолжим хорды и отложим $BC = x$ и $B_1C_1 = y$ так, чтобы $a + x$ и $b + y$ были данной длины. Искомые точки лежат на пересечении двух окружностей, концентрических данным.

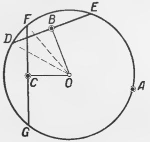
185*. *Решение.* Расстояние от середины отрезка, определяемого двумя данными точками, равно половине данной длины. Искомые хорды — касательные к двум окружностям (66, II).

191*. *Указание.* Четырехугольник сначала превратить в треугольник.

193*. *Решение.* Отложим на стороне AC искомого $\triangle ABC$ отрезок $AD = m$ (черт. 152). Соединим D с B и через C проведем



Черт. 152.



Черт. 153.

$CK \parallel DB$ (K — пересечение CK с AB или его продолжением). $\triangle AKD$ — искомый. Действительно, из подобия треугольников ABD и AKC следует: $AD : AC = BB_1 : KK_1$ (BB_1 и KK_1 — высоты треугольников ABD и AKC), откуда $AD \cdot KK_1 = AC \cdot BB_1$; $\frac{1}{2} AD \cdot KK_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1$, следовательно, $S_{\triangle AKD} = S_{\triangle ABC}$.

199*. *Решение.* Надо оба данных треугольника превратить в равновеликие им треугольники так, чтобы высоты их равнялись h_a (196, II). Тогда основание BC искомого треугольника будет равно разности оснований полученных треугольников.

206*. *Указание.* Разделить на пять равных частей среднюю линию.

218*. *Решение.* XB — биссектриса угла AXC, следовательно, $AX : XC = AB : BC$. Искомые точки находятся на пересечении данной окружности с г. м. *XII*.

226*. *Решение.* Пусть O — центр искомой окружности, а B и C — середины хорд $DE = a$ и $FG = b$ (черт. 153). Обозначив радиус

окружности через r и рассматривая треугольники OBD и OCF, получим:

$$OB^2 = OD^2 - DB^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

$$OC^2 = OF^2 - FC^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Кроме того, $$OA^2 = r^2. \qquad (3)$$

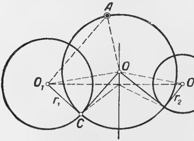
Вычитая (1) и (2) из (3), получаем:

$$OA^2 - OB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad OA^2 - OC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

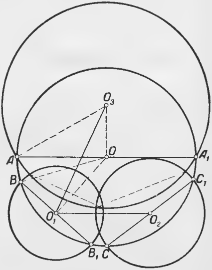
Задача сводится к построению перпендикуляров к AB и AC в определенных точках.

232*. *Решение.* Центр искомой окружности находится в точке взаимного пересечения хорд сечений данных окружностей. Где должна находиться точка пересечения трех хорд для возможности решения?

242*. *Решение.* Если O — искомая окружность, то из



Черт. 154.



Черт. 155.

$\triangle OO_1C$ следует $OO_1^2 = OC^2 + r_1^2$ (черт. 154). В выражение $O_1O^2 - AO^2$ вместо O_1O^2 подсгавим выше найденное значение. Имеем: $O_1O^2 - AO^2 = CO^2 + r_1^2 - AO^2 = r^2$. Далее применяем г. м. *XIII* и *XI*.

251*. *Решение.* Пусть искомая окружность O (черт. 155) пересекает окружности O_1 и O_2 по диаметрам BB_1 и CC_1 и сама пересекается окружностью O_3 по диаметру AA_1. Центр O с одной стороны должен лежать на перпендикуляре к линии центров O_1O_2, проведенном на таком расстоянии от O_1, на каком радикальная ось окружностей O_1 и O_2 отстоиг от O_2. Кроме того, проведя линии OO_1, OA, OB и OO_3 и обозначая радиусы окружностей O, O_1 и O_3 через r, r_1 и r_3, из треугольников BOO_1 и AO_3O получим:

$$OO_1^2 = r^2 - r_1^2, \qquad (1)$$

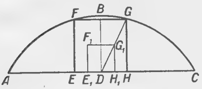
$$OO_3^2 = r_3^2 - r^2. \qquad (2)$$

Складывая почленно равенства (1) и (2), получим:

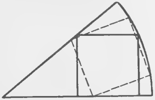
$$OO_1^2 + OO_3^2 = r_3^2 - r_1^2,$$

т. е., что центр O лежит на г. м. X. Следовательно, задача сводится к нахождению пересечения двух г. м. ($XIII$ и X).

258*. *Решение.* Надо построить в произвольном положении хорду MN данной длины и найти какую-нибудь точку P, удовлетворяющую



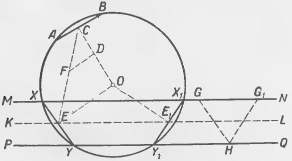
Черт. 156.



Черт. 157

условиям: $PM : PN =$ данному отношению (г. м. XII) и $OP = OA$. Затем $\triangle MNP$ перенести в требуемое положение. Сколько возможно решений?

284*. Эта задача сводится к следующей нетрудной, но ранее не встречающейся задаче: построить треугольник, зная a, b и B.

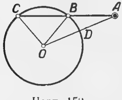


Черт. 158.

286*. *Указание.* Построение квадрата, вписанного в сегмент, показано на чертеже 156. Два возможных положения вписанного в сектор квадрата указаны на чертеже 157.

289*. *Решение.* Пусть O — центр искомой окружности (черт. 158) и $XY = AB$. Направление искомой хорды XY можно определить (3, II). Перпендикуляры OC и OE, опущенные из центра окружности на AB и XY, равны между собой и делят хорды AB и XY пополам. Поэтому E находится на прямой KL, равноотстоящей от данных

прямых MN и PQ (40, I). $\triangle COE$ — равнобедренный с известным углом при вершине, так как направления AB и XY, а следовательно, и перпендикуляр к ним известны. Задача сводится к нахождению точки E, которая может быть определена методом подобия. Проводим $CD \perp AB$, через произвольную точку D этого перпендикуляра проводим $DF \perp GH$, откладываем $DF = DC$ и соединяем с C. E — точка пересечения KL и FC. Затем проводим $EO \parallel FD$ и находим искомый центр O ($\triangle CFD \backsim \triangle CEO$). Используя направление другой хорды X_1Y_1, параллельной HG_1, получим тот же центр O.

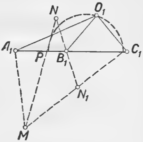


Черт. 159.

291*. *Решение.* На произвольной прямой откладываем отрезки $AB = m$ и $BC = n$, на которых строим дуги, вмещающие данные углы, и точку D пересечения этих дуг соединяем с A, B и C; затем строим треугольник, подобный $\triangle ABC$, с вершиной в M и с основанием на прямой PQ.

292*. *Решение.* Соединим центры O и O_1 с данными точками A и B. Пусть C — пересечение OA и O_1B. Задача сводится к отысканию на сторонах AC и BC треугольника ABC таких точек M и N (центров искомых окружностей), чтобы было справедливо отношение $AM : MN : NB = 1 : 2 : 1$ (269, II).

298*. *Решение.* Середину одного основания соединить с концом параллельного основания трапеции и через точку пересечения этой прямой с диагональю провести искомую прямую.



Черт. 160.

312*. *Решение.* Пусть ABC (черт. 159) — искомая секущая. Отложим $A_1B_1 = m$ и $B_1C_1 = n$ (черт. 160) и найдем точку O_1, находящуюся на одинаковом расстоянии от точек B_1 и C_1 (г. м. *II*) и на расстояниях от A_1 и B_1, находящихся в отношении $OA : OB$ (г. м. *XII*). Получим $\triangle A_1O_1C_1 \backsim \backsim \triangle AOC$. Построив $\angle OAC = \angle O_1A_1C_1$, получим искомую секущую.

320*. *Указание.* После умножения окружностей на данное отношение проведем к ним общие касательные. Затем применяем 5, II. Всего может быть четыре решения.

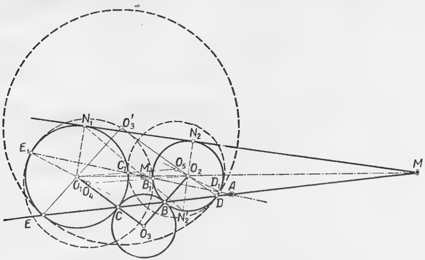
321*. *Решение.* 1) Пусть O_3 — искомая окружность с точками касания C и B (черт. 161). Прямая CBA пересекает линию центров O_1O_2 в центре подобия M, так как $O_1E \parallel O_2B$ и $O_1C \parallel O_2D$. Точку M можно построить, проведя прямую N_1N_2 через концы двух параллельных радиусов O_1N_1 и O_2N_2. Точки касания B и C лежат на пересечении прямой MA с окружностями O_1 и O_2. Задача допускает два решения: 1) окружность O_3 дает внешнее касание в точках B и C и 2) окружность O_3^1 дает внутреннее касание в точках E и D. Построив второй центр подобия M_1, можно провести вторую прямую AM_1 и получить 4 точки пересечения с окружностями

(E_1, C_1, B_1 и D_1). Это дает возможность построить еще две касательные окружности O_4 и O_5, из которых O_4 имеет внутреннее касание с O_1 и внешнее с O_2, а O_5 имеет внешнее касание с O_1 и внутреннее с O_2.

2) Если задан угол $O_1O_3O_2$, то легко найти

$$\angle O_1EC = \angle O_1CE = \angle O_2BD = \angle O_2DB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle O_1O_3O_2.$$

По данному углу O_1EC можно определить величину хорд EC и BD. Задача сводится к построению общей касательной к окружностям, проведенным из центров O_1 и O_3 радиусами, равными рас-



Черт 161.

стоянию хорды EC от O_1 и хорды BD от O_2. И здесь можно провести внешнюю касательную и внутреннюю касательную и получить четыре решения.

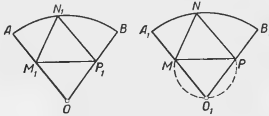
328*. Аполлоний Пергский, один из наиболее замечательных математиков Александрийской школы, жил во второй половине III в. до н. э. Самым важным трудом Аполлония является его сочинение о конических сечениях „Conica" в восьми книгах, которое до времен Ньютона служило главным руководством по этому отделу геометрии.

Кроме указанного сочинения, Аполлоний написал много других, в том числе труд „О касаниях", где изложена приводимая И. И. Александровым знаменитая задача о круге, касательном к трем данным.

330*. *Решение.* Около данного треугольника MNP (черт. 162) описываем сектор $O_1A_1B_1 = OAB$, где OAB — данный сектор. Центр O_1 лежит на пересечении дуги MO_1P, описанной на MP и вмещающей угол, равный центральному углу O с окружностью,

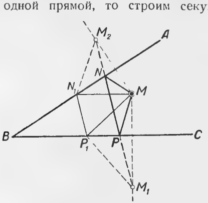
проведенной из центра N радиусом, равным OA. Затем откладываем $AN_1 = A_1N$, $AM_1 = A_1M$, $OP_1 = O_1P$ и получаем искомый $\triangle M_1N_1P_1$.

335*. *Решение.* Пусть данные точки будут A, B и C. Взяв произвольную окружность, построим три концентрические окружности, из точек которых данная окружность видна под заданными

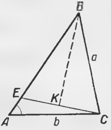


Черт. 162.

углами (г. м. VII). Затем построим треугольник, подобный треугольнику ABC, так, чтобы вершины его лежали на соответствующих концентрических окружностях. Если же точки A, B и C лежат на одной прямой, то строим секущую $A_1B_1C_1$ так, чтобы точки A_1, B_1 и C_1 лежали на концентрических окружностях и чтобы $A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC$.



Черт. 163.



Черт. 164.

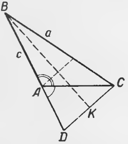
Определив коэфициент подобия фигур $A_1B_1C_1$ и ABC, переносим на фигуру ABC центр окружности и самую окружность.

348*. *Решение.* Одна вершина искомого треугольника находится в точке пересечения окружности O с окружностью O_2, симметричной O_1 относительно MN, а расстояние от этой точки до MN равно половине стороны искомого треугольника.

350*. *Указание.* Периметр искомого $\triangle MNP$ будет наименьший, когда ломаная $M_2N_1P_1M_1$ превратится в прямую (черт. 163).

359*. *Решение.* Пусть $\triangle ABC$ — искомый (черт. 164), в котором $AE = AB - BC$. Если $\angle A$ острый, то сначала строим $\triangle AEC$

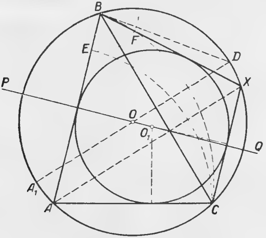
(20, I), затем через середину K отрезка CE проводим $KB \perp CE$ до пересечения с AE в B. Соединив B с C, получим требуемый треугольник. Пусть теперь данный $\angle A$ тупой (черт. 165). Тогда надо построить сначала $\triangle ADC$ по углу $DAC = 180° - A$ и двум прилежащим сторонам (24, I), затем через середину K отрезка DC провести $KB \perp DC$ до пересечения с AD в B.



Черт. 165.

363*. *Решение.* Так как искомый четырехугольник $ABXC$ — вписанный, то четвертая вершина X должна лежать на окружности, описанной около $\triangle ABC$ (черт. 166). Чтобы этот четырехугольник был описанным, необходимо, чтобы суммы противоположных сторон были равны между собой, т. е. $AB + CX = AC + BX$ или $AB - AC = BX - CX$ (344, II). На чертеже показано построение.

368*. *Решение.* Пусть $ABCD$ (черт. 167) — искомый прямоугольник: AB — основание, BC — высота, AC — диаметр. Отложив $\frac{BC}{n}$ на AB, получим данную разность. Построив где-нибудь прямоугольный $\triangle E_1B_1C_1$ с отношением катетов $C_1B_1 : B_1E_1 = n$, получим внешний угол $C_1E_1A_1$, равный углу CEA.

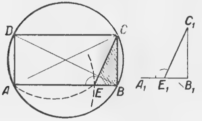


Черт. 166.

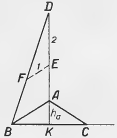
Задача сводится к определению точки E, которая находится в пересечении окружности, проведенной из конца A диаметра радиусом, равным данной разности, и дуги, описанной на диаметре AC и вмещающей $\angle AEC = \angle A_1E_1C_1$.

372*. *Решение.* На продолжении высоты AK отложим $AD = AB + AC$, т. е. $KD = h_a + 2AB$. Точку D соединим с B (черт. 168).

Вид $\triangle ABD$ известен. Таким образом, приходим к следующему решению. На произвольной прямой откладываем $BC = a$, через середину BC проводим перпендикуляр $KD \perp BC$, на котором отклады-



Черт. 167.

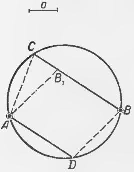


Черт. 168.

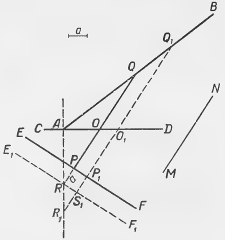
ваем отрезок KD, равный данной сумме; так как $AD:BA = 2$, то для определения точки A применяем г. м. XII.

379*. *Решение.* В искомом треугольнике основание AC должно равняться высоте и равно половине данной длины.

388*. *Указание.* Из большего основания вычесть меньшее.



Черт. 169.



Черт. 170.

390*. *Решение.* Если A и B — данные точки, а AD и BC — искомые хорды (черт. 169), то, перенеся DB параллельно в AB_1, задачу сведем к построению равнобедренного треугольника по основанию CB_1 и прилежащему углу ACB (21, I). Угол ACB известен как вписанный, опирающийся на дугу AB.

392*. *Решение.* Пусть AB, CD и EF — данные прямые, а PQ (черт. 170) — искомая секущая такая, что $QO - OP = a$. Перенесем прямую EF параллельно самой себе так, чтобы точка P перешла

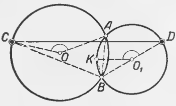
в R и $PR = a$; получим $RO = OQ$. Соединим R с точкой A пересечения прямых AB и CD и проведем $Q_1R_1 \parallel QR$.

Отрезок Q_1R_1 точкой O_1 делится пополам. Отсюда вытекает построение: через произвольную точку Q_1 прямой AB проводим $Q_1O_1 \parallel MN$ (MN указывает направление); откладываем $O_1R_1 = O_1Q_1$ и $P_1S_1 = a$. Через S_1 проводим $E_1F_1 \parallel EF$ и через точку R пересечения E_1F_1 с прямой R_1A проводим искомую секущую $RPOQ$. Действительно, $RO = OQ$, $RP = a$, $OQ - OP = RP = a$.

394*. *Решение.* Провести хорду BB_1 параллельно данному направлению. Тогда $BY = B_1X$, и задача свелась к 364, II.

427*. *Решение.* Так как для трапеций ломаная BCY обращается в прямую (черт. 74), то строим параллелограм $BXYD$ по сторонам и углу. Проводим в нем диагональ BY, потом прямую $DA \parallel BY$ и затем используем данную сторону.

430*. *Указание.* Эта задача может быть решена с помощью задачи 395, II и параллельного перенесения.



Черт. 171.

443*. *Решение.* Повернуть $\triangle ABC$ вокруг AC в положение AB_1C и рассмотреть $\triangle B_1CD$.

445*. *Решение.* Можно определить AA_1 и построить $\triangle AA_1C$ (черт. 76) или при помощи 90, I свести к 443, II.

455*. В старом издании задачника И. И. Александрова имеется следующее исследование возможности решения.

Задача возможна только при условии $O_2J \leqslant OO_2$, откуда $a \leqslant 2\,OO_2$. Если $a = 2\,OO_2$, то искомые хорды параллельны прямой OO_2, и получается одно решение, если только $\angle OO_2O_1$ будет тупой. Если же $a = 2\,OO_2$ и $\angle OO_2O_1$ будет острым, то решения не будет, и сумма искомых отрезков равна a; наконец, если $a = 2\,OO_2$ и $\angle OO_2O_1$ будет прямой, то хорда AC обращается в нуль, и для возможности задачи нужно еще условие $OO_2{}^2 = R^2 - r^2$, где R и r суть радиусы данных окружностей.

468*. *Решение.* $\angle BXC = \angle BOC + (\angle XBO - \angle XCO)$. Искомая точка X лежит на пересечении данной окружности с дугой, описанной на отрезке AB и вмещающей известный угол.

479*. *Решение.* Повернем одну окружность после умножения на данный угол; тогда она встретит вторую окружность в искомой точке.

485*. *Указание.* Задача сводится к построению $\triangle PXY \backsim \triangle PAB$.

493*. *Решение.* Пусть точки C и D — искомые (черт. 171) и $\angle ABC - \angle ABD = \alpha$ или $\angle ABC = \angle ABD + \alpha$; отложив на окружности O_1 дугу AK, измеряющую вписанный угол α, получим $\angle ABC = \angle KBD$ или $\angle AOC = \angle KO_1D$. Задача свелась к 485, II.

495*. *Решение.* Описывая на диагонали AC дуги, вмещающие углы B и D, получим две окружности, пересекающиеся в точках A и C. Концы другой диагонали BD должны находиться на этих окружностях. Задача свелась к 493, II.

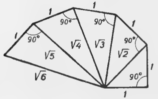
500*. *Решение.* С помощью параллельного перенесения (черт. 74, где стороны параллелограма $BXYD$ равны диагоналям четырехугольника $ABCD$) эта задача сводится к 495, II.

505*. См. примечание к задаче 328*.

513*. *Решение.* Принимая за центр инверсии данную точку, задачу сведем к 66, II.

514*. *Решение.* Если точку пересечения трех окружностей принять за центр инверсии, то задача сведется к 117, II.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.



Черт. 172.

4*. *Указание.* Построение $\sqrt{m}$ показано на чертеже 172.

33*. *Указание.* За неизвестное взять внешнюю часть секущей.

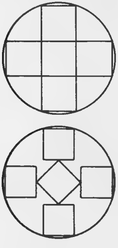
35*. *Указание.* Два возможных случая указаны на чертеже 173.

40*. *Указание.* За неизвестное принять высоту.

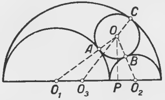
51*. *Решение.* Соединим центр O искомой окружности радиуса x с центрами O_1, O_2 и O_3 данных окружностей радиусов R, r и $R+r$ (черт. 174). Точки касания обозначим через A, B и C.

Будем иметь: $OO_1 = O_1A + AO = R + x$; $OO_2 = O_2B + BO = r + x$; $OO_3 = O_3C - OC = (R + r) - x$; $O_1O_3 = (R + r) - R = r$.

71*. *Указание.* За неизвестное принять угол, образованный крайним радиусом сектора, с радиусом, проведенным в вершину прямоугольника, находящуюся на дуге.



Черт. 173.



Черт. 174

75*. Квадратура круга — одна из трех знаменитых задач древности (две другие: делийская задача — 76, III и трисекция угла — 93, III).

Построения, выполняемые циркулем и линейкой, ограничены. В силу этого многие задачи, имеющие иногда очень простую фор-

мулировку, не могут быть решены при помощи только этих двух инструментов.

Многочисленные попытки решить эти три задачи поглотили много безуспешных усилий как в древнее, так и в новое время и не дали положительных результатов. Тем не менее они имели большое значение, так как привели к целому ряду интересных геометрических открытий, сыгравших важную роль в дальнейшем развитии геометрии. Невозможность решения этих трех задач циркулем и линейкой была обоснована теоретически лишь в XIX в.

76*. Делийская задача — одна из трех знаменитых задач древности (см. примечание 75, III). По преданию, древнегреческий философ Платон (IV в. до н. э.) во времы чумы посоветовал для умилостивления богов удвоить кубический жертвенник Делийского храма. Отсюда и название — делийская задача.

92*. *Указание.* Рассмотреть сначала тот случай, когда две данные прямые пересекаются под прямым углом.

93*. Трисекция угла — одна из трех знаменитых задач древности (см. прим. к 75*), циркулем и линейкой разрешима лишь в специальных случаях (см. 47, II). Однако она легко решается во всех случаях при помощи некоторых других инструментов, например, двух угольников, циркуля и угольника, циркуля и линейки с двумя метками на краю и т. д. В V отделе показано, как выполняется деление произвольного угла DOE на три равные части (черт. 129) с помощью циркуля и линейки с двумя метками на краю (у И. И. Александрова вместо линейки взята бумажная полоска).

Это решение трисекции угла, основанное на так называемом приеме „вставки“ (отрезок a вставляется между окружностью и продолжением стороны угла), было известно уже в древности (его приписывают Архимеду).

94*. *Решение.* Искомый треугольник можно построить, если известна, например, одна сторона или угол. Обозначая половину угла при вершине через α и данную высоту через a, можно прийти к уравнению:

$$4R\cos^3\alpha - 2R\cos\alpha - a = 0,$$

где R — радиус данной окружности.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

4*. *Решение.* Внутреннюю часть BC секущей нетрудно определить, если провести касательную AK и заметить, что $BC = AK$ или $AB = AK$.

7*. Папп (Pappus), один из выдающихся греческих математиков, жил в Александрии в конце III в. н. э. Важнейшим из сочинений Паппа является сочинение, известное под именем „Сборника“, который имеет огромное значение для истории математики, так как он знакомит нас с рядом ныне утерянных трудов греческих классиков.

Лично Паппу принадлежит несколько известных теорем. Приводимая И. И. Александровым „Задача Паппа", не решенная самим Паппом, послужила для Декарта первым образцом приложения созданной им аналитической геометрии.

43*. *Решение.* Перенесем параллельно CX и DX в BF и AF; тогда можно построить вписываемый в окружность четырехугольник $FBXA$. Построенную фигуру легко перенести на данную.

44*. *Решение.* Строим $\triangle B_1C_1D_1$ известной формы и на отрезках B_1C_1 и D_1C_1 описываем дуги, вмещающие углы BAC и DAC. Таким образом находим точку A_1. Из A проводим касательную AK к окружности O, а из A_1 — касательную к окружности O_1, описанной около $\triangle B_1C_1D_1$, и т. д.

68*. *Решение.* Отрезок MB можно определить из уравнения $MB \cdot MA = k^2$ (AB — данный отрезок, M — центр подобия данных окружностей).

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

1) — 4)*. (Стр. 137). Первая задача из четырех указанных здесь по существу сводится к третьей, т. е. к пересечению данной прямой с некоторой окружностью, так как „указать" на данной прямой одну или несколько точек можно только путем пересечения ее с какой-либо линией — прямой или кривой. Четвертая же задача сводится к третьей (см. Адлер, Теория геометрических построений); правда, циркулем она решается непосредственно.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Редактор *В. С. Капустина*
Техн. редактор *Н. Н. Махова*

Подписано к печати 4/IV 1950 г. А-02814. Печатных листов 11. Учётно-изд. листов 12,19. Заказ № 518. Цена без переплёта 3 р. 65 к. Переплёт 60 к.

Отпечатано в типографии Т-5 с матриц 2-й типографии „Печатный Двор" им. А. М. Горького Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград.